

Convenções v.a. = variável aleatória; f_X = função de probabilidade (discreta) ou densidade (contínua); $F_X(x) = P(X \leq x)$; $\bar{A}$ = complementar; i.i.d. = independentes e identicamente distribuídas; $\approx$ = “tem aproximadamente”; Φ = f.d. da $N(0, 1)$. Em $N(\mu, \sigma^2)$ o 2.º parâmetro é a **variância**.

Marcas: **[F]** vem no formulário oficial (só a tabela das famílias, §4.1) · **★** decorar (todo o resto).

Molde do MAP1 (1.ª metade dos 9 exames de 2025/26, ≈ 10 val.): **Q1** acontecimentos/Bayes (9/9) · **Q2** uma v.a. (8/9) · **Q3** famílias (9/9) · **Q4** par aleatório (6/9) · **Q5** somas/TLC (6/9). Perguntas de 2 val. (EM A–D) e 3 val. (abertas, justificar).

Índice: 1 Acontecimentos · 2 Condicional, Bayes, independência · 3 Uma v.a. · 4 Famílias · 5 Pares aleatórios · 6 Somas e TLC · 7 Exemplos-tipo · 8 Checklist.

1. Acontecimentos e regras básicas ★

1.1 Linguagem de conjuntos

Ω = espaço de resultados; acontecimento = subconjunto de Ω .

$A \cup B$	pelo menos um	$\bar{A}$	não ocorre A
$A \cap B$	ocorrem ambos	$A \cap \bar{B}$	só A (“A mas não B”)
$A \cap B = \emptyset$	disjuntos	$A \subset B$	A implica B

(incompatíveis)

1.2 Axiomas de Kolmogorov e consequências

(1) $P(A) \geq 0$ (2) $P(\Omega) = 1$ (3) A_i disjuntos 2 a 2 $\Rightarrow P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$.

Regras de cálculo

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad P(\emptyset) = 0 \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C) = \sum P(\cdot) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

De Morgan: $A \cup B = \overline{A \cap B}$ (“nenhum”) $A \cap B = \overline{A \cup B}$ (“pelo menos um não”).

1.3 Traduzir a frase do enunciado

Frase	Probabilidade
pelo menos um	$P(A \cup B)$, ou $1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$
nenhum	$1 - P(A \cup B)$
um e um só	$P(A \cup B) - P(A \cap B)$
quando muito um	$1 - P(A \cap B)$
pelo menos um de n (indep.)	$1 - \prod (1 - p_i)$
“sabendo que”, “se”, “dado que”	condicional $P(\cdot \mid \cdot)$
“de entre os que...”	condicional

1.4 Laplace e contagens

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ — só com Ω finito e resultados equiprováveis.

Ordem não importa: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ · ordem importa, sem repetição: $\frac{n!}{(n-k)!}$ · permutações: $n!$ · com reposição e ordem: n^k · grupo misto (escolher k de $a + b$, i do 1.º grupo): $\binom{a}{i} \binom{b}{k-i} / \binom{a+b}{k}$. (Contagens pesadas não saíram em 2025/26.)

2. Condicional, probabilidade total, Bayes e independência ★

2.1 Probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Saber que B ocorreu **encolhe o universo** para B. $P(\cdot \mid B)$ é uma probabilidade: $P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$. **Nunca confundir** $P(A \mid B)$ com $P(B \mid A)$.

Condicional “disfarçada” (saiu em 6 dos 9 enunciados)

Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$ e $P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.

Ex.: $P(Y \geq 3 \mid Y \geq 1) = \frac{P(Y \geq 3)}{P(Y \geq 1)}$; $P(X > a \mid X < q_{0.5}) = \frac{0.5 - F(a)}{0.5}$ (não é preciso calcular $q_{0.5}$, pois $F(q_{0.5}) = 0.5$).

2.2 Probabilidade composta (em cadeia)

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots$$

Para tiragens **sem reposição** (o denominador desce) e fases sucessivas. Ex.: 1.ª preta na 3.ª tiragem de 5B+5P: $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$. **Simetria:** sem reposição, a prob. marginal da 2.ª tiragem é igual à da 1.ª.

2.3 Probabilidade total e Bayes

Partição $\{A_i\}$: causas disjuntas 2 a 2 que cobrem Ω .

Probabilidade total e Teorema de Bayes

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i) \quad P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

$P(A_i)$ = **a priori**; $P(B \mid A_i)$ = verosimilhança; $P(A_k \mid B)$ = **a posteriori**. As posteriores somam 1 (verificação grátis).

Passos: (1) nomear acontecimentos e escrever **todos** os dados como $P(\cdot)$ ou $P(\cdot \mid \cdot)$ — já pontua; (2) partição + a priori; (3) árvore: ramos $P(A_i)$, sub-ramos $P(B \mid A_i)$, cada caminho **multiplica**; (4) $P(B)$ = soma dos caminhos que acabam em B; (5) Bayes = caminho de A_k / soma.

Reconhecer: “sabendo que deu ... , qual a prob. de ter sido ... ” $\rightarrow$ Bayes; “percentagem **global**” com subpopulações $\rightarrow$ total.

Atenção — ramo certo

Se pedem “teste **negativo**”, usar $P(\bar{T} \mid E) = 1 - P(T \mid E)$ em todo o lado. “Qual a causa mais provável?” $\rightarrow$ calcular **todas** as posteriores (a maior a priori pode não ganhar). Condicionais implícitas: se a causa não é C_i , a brigada i falha com prob. 1. “75 % **não** está bom” $\Rightarrow P(\text{bom} \mid \cdot) = 0,25$.

2.4 Independência

$$A, B \text{ independentes} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$\iff P(A \mid B) = P(A) \quad (P(B) > 0)$$

Passa aos complementares ($A, \bar{B}$; $\bar{A}, \bar{B}$ também). **Mútua** (3 ou mais): produto em **todas** as subcoleções (3 duplas e a tripla) — aos pares não chega. **Condicionalmente independentes** dado C: $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$ (ex.: teste repetido 2 vezes: $P(++ \mid C) = 0,99^2$).

Atenção — disjuntos $\neq$ independentes

$A \cap B = \emptyset$ com $P(A), P(B) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) \Rightarrow$ **dependentes**.

2.5 Sistemas em série e em paralelo (componentes independentes)

$$P(\text{série}) = \prod_i p_i \quad P(\text{paralelo}) = 1 - \prod_i (1 - p_i)$$

Série = funcionam todos (interseção); paralelo = funciona pelo menos um (união, pelo complementar). Misto “1 **ou** (2 e 3)”: $1 - (1 - p_1)(1 - p_2 p_3)$. Ex.: A e pelo menos um de B, C falha: $P(A)[1 - P(B)P(C)]$.

3. Uma variável aleatória ★

3.1 Função de distribuição

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$0 \leq F \leq 1$, **não decrescente**, contínua à direita, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Salto num ponto = probabilidade desse ponto: $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$. Discreta: F em **escada**; contínua: sem saltos; mista: ambos.

Discreta: cuidado com $<$ vs $\leq$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$
$$P(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$$
$$P(X \geq a) = 1 - F(a^-)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$
$$P(X > a) = 1 - F(a)$$
$$\text{inteiros:}$$
$$P(7 \leq X \leq 12) = F(12) - F(6)$$

Numa v.a. **contínua** $P(X = x) = 0$ e os sinais $<$, $\leq$ são indiferentes.

■ 3.2 Discreta vs contínua

	Discreta	Contínua
f_X	$P(X = x)$	$f'_X(x)$ (pode ser > 1 !)
Condição	$f \geq 0, \sum f = 1$	$f \geq 0, \int_{\mathbb{R}} f = 1$
$F_X(x)$	$\sum_{x_i \leq x} f(x_i)$	$\int_{-\infty}^x f(t) dt$
$P(X \in A)$	$\sum_{x_i \in A} f(x_i)$	$\int_A f(x) dx$ (área)
f a partir de F	saltos de F	derivada de F

Constante k : impor $\sum f = 1$ ou $\int f = 1$ (e confirmar $f \geq 0$).
 F contínua por troços: integrar desde o início do suporte, **acumulando a área dos troços anteriores**; F tem de ser contínua e acabar em 1. Truque para caudas: $\int_x^3 (1 - \frac{t}{3})dt = \frac{(3-x)^2}{6}$ (área de triângulo).

■ 3.3 Valor esperado, variância e companhia

Momentos
 $E[X] = \sum x f(x) \left(\int x f \right)$
 $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
 $E[aX + b] = aE[X] + b$

$E[g(X)] = \sum g(x) f(x) \left(\int g f \right)$
 $\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$
 $C_V = \frac{\sigma_X}{|E[X]|}$
 $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

Lei do estatístico inconsciente: $E[g(X)]$ calcula-se **sem** achar a distribuição de $g(X)$: tabela $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(x)$ e somar. g **não linear** (custo por escalões, $|X - 6|$, X^2): **não há atalho**, $E[g(X)] \neq g(E[X])$. **Quadrática:** $Var[aX^2 + b] = a^2(E[X^4] - E[X^2]^2)$ (o b desaparece). **Simetria** em torno de $c \Rightarrow E[X] = c =$ mediana. $Var \geq 0$; $Var = 0 \iff X$ constante. $E[X]$ pode não ser um valor possível de X .

■ 3.4 Moda e quantis

Moda = x que maximiza f_X (pode ser múltipla ou um intervalo).
Quantil q_p : $F(q_p^-) \leq p \leq F(q_p)$.

- **Discreta:** mediana = **menor** x com $F(x) \geq 0,5$ (se $F(x) = 0,5$ exatamente num patamar, qualquer ponto do patamar serve).
- **Contínua:** resolver $F(q) = p$ **no troço certo** (ver primeiro em que troço F atinge p). Quantis altos: usar a cauda $1 - F(q) = 1 - p$.
- “Stock que chega em 95 % dos dias” = $q_{0,95}$. $AIQ = q_{0,75} - q_{0,25}$.
- Cauda longa à direita $\Rightarrow$ média $>$ mediana.

Passos (“dada f com k ”): $k \rightarrow F$ por troços $\rightarrow E, E[X^2], Var$ ($DP = \sqrt{Var}$ se pedem desvio padrão) $\rightarrow$ moda, quantis. Se pedem comparar (“ $DP > E?$ ”), **escrever a desigualdade final**.

4. Famílias de distribuições

■ 4.1 Tabela das famílias [F] (Bernoulli ★)

Modelo	$f_X(x)$	Suporte	E	Var
$Ber(p)$	$p^x(1 - p)^{1-x}$	0, 1	p	$p(1 - p)$
$Bi(n, p)$	$\binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x}$	0..n	np	$np(1 - p)$
$Geo(p)$	$p(1 - p)^{x-1}$	1, 2, ...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Poi(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	0, 1, ...	λ	λ
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	μ	σ^2

Geométrica = nº de provas **até ao 1.º sucesso, inclusive** (começa em 1). $U\{1..n\}$ discreta: $f = 1/n$.

■ 4.2 Escolher o modelo (sinais no enunciado)

Situação	Modelo
1 prova sucesso/insucesso	$Ber(p)$
nº de sucessos em n provas indep., p constante; “com reposição”	$Bi(n, p)$
nº de provas até ao 1.º sucesso; “nº de inspeções necessárias”	$Geo(p)$
“em média λ por dia/m²/hora”; contagem num intervalo	$Poi(\lambda)$
tempo de vida/espera; tempo entre ocorrências de Poisson	$Exp(\lambda)$
“igualmente provável” num intervalo	$U(a, b)$
medições com média e desvio padrão; somas	$N(\mu, \sigma^2)$

Na resposta escrever logo: “ $X = \dots \sim$ **Modelo(parâmetros)**” + justificação (provas independentes, p constante). **Sem reposição** de população pequena: **não** é binomial — contar com $()$ (variância menor).

■ 4.3 Funções de distribuição a saber ★

$Geo : P(X > k) = (1 - p)^k$
 $Exp : F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, P(X > x) = e^{-\lambda x}$
 $Poi : P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}, P(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)$

$U(a, b) : F(x) = \frac{x-a}{b-a}$
 $Geo : P(X \geq 4) = P(X > 3) = (1 - p)^3$. Mediana da Exp : $q_{0,5} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ($<$ média). Quantil: $q_p = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$.

■ 4.4 Falta de memória (amnésia) ★

Só a geométrica e a exponencial
 $P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$ (Geo: $(1 - p)^t$; Exp: $e^{-\lambda t}$)
“O que já esperaste não conta”: subtrai-se o tempo já passado.
Distratores típicos: $P(X > s + t)$ e $P(X > s)$.

Atenção — a uniforme NÃO tem amnésia $X \sim U(a, b)$ e “já passou c ”: $X \mid X > c \sim U(c, b)$, logo $P(X > d \mid X > c) = \frac{b-d}{b-c}$ e $E[X - c \mid X > c] = \frac{b-c}{2}$.

■ 4.5 Normal: padronização ★

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
 $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$
 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Dividir pelo **desvio padrão** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, nunca pela variância. Simétrica: moda = mediana = μ . $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. $P(|X - \mu| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$ ($k = 1$: 0,6827; $k = 2$: 0,9545). **Dadas percentagens** (“50 % abaixo de 2,5”): ler a tabela **ao contrário**: $\frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p)$; abaixo da média $z < 0$. “Duração que 90 % excedem”: $z = -1,2816$.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9772
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918
0,5	0,6915	1,5	0,9332	2,5	0,9938
0,6	0,7257	1,6	0,9452	2,6	0,9953
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,8	0,9974
0,8	0,7881	1,8	0,9641	3,0	0,9987
0,9	0,8159	1,9	0,9713	3,4	0,9997

Quantis: 0,75 $\rightarrow$ 0,6745 · 0,80 $\rightarrow$ 0,8416 · 0,90 $\rightarrow$ 1,2816
0,95 $\rightarrow$ 1,6449 · 0,975 $\rightarrow$ 1,96 · 0,99 $\rightarrow$ 2,3263
0,995 $\rightarrow$ 2,5758 (quantis de $N(0, 1)$: $z_p = \Phi^{-1}(p)$)

■ 4.6 Processo de Poisson ★

$N(t) \sim Poi(\lambda t)$
 $T \sim Exp(\lambda)$
 $P(T > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

Contar num intervalo de comprimento $t \rightarrow$ Poisson; **medir** o tempo entre ocorrências $\rightarrow$ exponencial. **Reescalar** λ ao intervalo pedido: 4 bolhas por $10\text{ m}^2 \Rightarrow \text{Poi}(2)$ em 5 m^2 ; 10 mensagens/dia $\Rightarrow \lambda = 10/24$ por hora. $\text{Poi} =$ limite de $\text{Bi}(n, \lambda/n)$, $n \rightarrow \infty$.

■ 4.7 Parâmetro a partir de uma pista ★

Pista no enunciado	Conclusão
Poi, $P(X = k) = P(X = k + 1)$	$\lambda = k + 1$
Poi, $P(X = k + 1) = c P(X = k)$	$\lambda = c(k + 1)$
Poi, $P(X = 0)$ dado	$\lambda = -\ln P(X = 0)$
Poi, $E[X^2]$ dado	$\lambda + \lambda^2 = E[X^2]$
Bi, E e Var dados	$1 - p = \text{Var}/E$, $n = E/p$
$U(-\alpha, \alpha)$, Var dada	$\alpha^2/3 = \text{Var}$
Exp com média m	$\lambda = 1/m$ (não $m!$)
Normal: 2 percentagens dadas	2 equações $\frac{x_i - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p_i)$

Razão útil da Poisson: $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\lambda}{k+1}$. Se o enunciado diz “se não conseguir, use $\lambda = 5$ ”, **usar** — o método é cotado.

■ 4.8 Segundo momento e modas ★

$E[X^2] = \text{Var} + E^2$: Bi: $np(1 - p) + (np)^2 \cdot \text{Poi}$: $\lambda + \lambda^2 \cdot U(a, b)$: $\frac{a^2+ab+b^2}{3} \cdot \text{Exp}$: $\frac{2}{\lambda^2}$.

Moda $\text{Bi}(n, p)$: $np + p - 1 \leq m_0 \leq np + p$ (i.e. $\lfloor (n + 1)p \rfloor$); prova pelo quociente $\frac{P(X=m)}{P(X=m-1)} \geq 1$. $\text{Poi}(\lambda)$: $m_0 = \lfloor \lambda \rfloor$ (λ inteiro: $\lambda - 1$ e λ). **Geo**: sempre 1. N : μ .

■ 4.9 Dois níveis (modelo dentro de uma binomial) ★

“Em quantos dos n anos/medições/placas acontece...”: (1) $p = P(\text{evento numa prova})$ com o modelo de **uma** prova (Poisson, uniforme, normal, exponencial...); (2) $W \sim \text{Bi}(n, p)$. Pode levar um TLC por cima. Ex.: placa perfeita $p = e^{-1}$, n° de perfeitas em $10 \sim \text{Bi}(10, e^{-1})$. Normal $\rightarrow p \rightarrow$ binomial também (elevador: n° de pessoas com mais de 85 kg). **Filtragem de Poisson**: $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ e cada ocorrência é registada com prob. $q \Rightarrow$ registadas $\sim \text{Poi}(\lambda q)$.

5. Pares aleatórios ★

■ 5.1 Conjunta, marginais e condicionais

Fórmulas (contínuo: trocar $\sum$ por $\int$)
 $f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
 $f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) \quad \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \right)$
 $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad E[X | Y = y] = \frac{\sum_x x f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$

- **Marginais** = somar a linha/coluna (escrever na margem; confirmar que somam 1). No contínuo, os limites vêm do **suporte: desenhá-lo primeiro**.
- **Condicional** = linha/coluna a dividir pela marginal. Se for uma família conhecida (ex. $X | Y = y \sim U(0, y)$, $Y | X = 3 \sim \text{Bi}(3, \frac{1}{2})$), E e Var saem da tabela.
- $E[aY + b | X = x] = a E[Y | X = x] + b \cdot E[E[X | Y]] = E[X]$.
- $F_{X,Y}(a, b)$ numa tabela: somar **todas** as células com $x \leq a$ e $y \leq b$.
- $P(Y > X)$, $P(X + Y \leq 4)$: marcar as células que satisfazem e somar. Contínuo: integrar f sobre a região (uniforme no quadrado: prob. = **área**).
- **Construir a conjunta** quando não é dada: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y)$; ou, a partir de 2 provas independentes A, B , percorrer as combinações (a, b) com $P = p_A(a) p_B(b)$ e ver para onde vai cada uma.

■ 5.2 Independência

X, Y indep. $\iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x, y) \iff f_{X|Y=y} = f_X$

Como provar / refutar Dependentes (basta um): uma célula com $f_{X,Y} \neq f_X f_Y$ (de preferência um **0** na tabela com marginais > 0) $\cdot \text{Cov} \neq 0 \cdot$ **suporte não retangular** (triângulo $0 < x < y < 1$). **Independentes**: conjunta **fatoriza** $g(x)h(y)$ num retângulo (ex.: $p^{2-x-y}q^{x+y} = (p^{1-x}q^x)(p^{1-y}q^y)$).

■ 5.3 Valor esperado, covariância e correlação

Fórmulas
 $E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f_{X,Y}(x, y)$
 $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \quad \text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
 $\text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} \in [-1, 1]$

- $E[XY]$: só contam as células com $xy \neq 0$. Independentes $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$.
- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X] \cdot \text{Cov}[aX + b, cY + d] = ac \text{Cov}[X, Y] \cdot \text{Cov}$ é simétrica e bilinear.
- $|\text{Corr}| = 1 \iff Y = aX + b$; $\text{Corr}[aX, Y + b] = \text{signal}(a) \text{Corr}[X, Y]$.
- **Comentário**: sinal (positiva/negativa) + intensidade (fraca $|r| < 0,3$, moderada, forte $|r| > 0,7$) + “ $\text{Corr} \neq 0 \Rightarrow$ não independentes”.

Atenção — a recíproca é falsa Independentes $\Rightarrow \text{Cov} = 0$, mas $\text{Cov} = 0 \nRightarrow$ independentes (Cov só mede relação **linear**). Ex.: massa $\frac{1}{4}$ em $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$: $\text{Cov} = 0$ mas $f(0, 0) = 0 \neq \frac{1}{4}$.

Passos (tabela): marginais $\rightarrow EX, EX^2, \text{Var } X$ (idem $Y \rightarrow E[XY] \rightarrow \text{Cov} \rightarrow \text{Corr} \rightarrow$ independência (um zero)). **Passos (densidade)**: desenhar o suporte $\rightarrow$ marginais integrando a outra variável $\rightarrow$ momentos $\rightarrow E[XY] = \iint xy f \rightarrow \text{Cov}$. Truques: simetria em $x \leftrightarrow y$ dá f_Y igual a f_X ; termos ímpares em domínio simétrico integram a 0.

6. Somas, combinações lineares e TLC ★

■ 6.1 Combinação linear

$$E\left[\sum c_i X_i\right] = \sum c_i E[X_i]$$
$$\text{Var}\left[\sum c_i X_i\right] = \sum c_i^2 \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i < j} c_i c_j \text{Cov}[X_i, X_j]$$

Independentes: as covariâncias desaparecem. Coeficientes **ao quadrado**: $\text{Var}[3X - 2Y] = 9 \text{Var } X + 4 \text{Var } Y$; $\text{Var}[X - Y] = \text{Var } X + \text{Var } Y$ (**soma**!). Com dependência: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var } X + \text{Var } Y + 2 \text{Cov}$.

Atenção — $2X$ não é $X_1 + X_2$ $\text{Var}[2X] = 4 \text{Var } X$ (a **mesma** v.a. duas vezes: espessura dos dois lados do mesmo tubo) mas $\text{Var}[X_1 + X_2] = 2 \text{Var } X$ (duas cópias **independentes**: duas pessoas).

■ 6.2 Soma e média de n i.i.d. ($\mu = E[X_i], \sigma^2 = \text{Var}[X_i]$)

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i : E = n\mu, \text{Var} = n\sigma^2 \quad \bar{X} = \frac{S_n}{n} : E = \mu, \text{Var} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Bastam E e Var de **uma** parcela. Escrever “ind.” e “i.d.” por cima dos sinais de = (é cotado).

■ 6.3 Somas que preservam a família (independentes) — resultado exato

$$\sum c_i N(\mu_i, \sigma_i^2) \sim N\left(\sum c_i \mu_i, \sum c_i^2 \sigma_i^2\right)$$
$$\sum \text{Poi}(\lambda_i) \sim \text{Poi}\left(\sum \lambda_i\right) \quad \sum \text{Bi}(n_i, p) \sim \text{Bi}\left(\sum n_i, p\right)$$

Normais: dizer “**exatamente** normal (reprodutividade)” — não é preciso TLC. “ $A > B$ ” $\Rightarrow$ estudar $D = A - B > 0$.

6.4 Teorema do Limite Central

TLC $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de qualquer modelo, com E e Var finitos, n grande:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \stackrel{d}{\sim} N(0, 1) \Rightarrow P(S_n \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad \bar{X} \stackrel{d}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Binomial: $Bi(n, p) \stackrel{d}{\sim} N(np, np(1 - p))$ (soma de n Bernoullis).

Receita em 4 linhas: (1) $X_i = \dots$ ($i = 1..n$), $S = \sum X_i$; (2) $E[X_i]$, $\text{Var}[X_i]$ de uma parcela (da tabela, de uma densidade, ou dados: “ $DP = 3$ ” $\Rightarrow \text{Var} = 9$); (3) $E[S]$, $\text{Var}[S]$; (4) “ $S \stackrel{d}{\sim} N(\cdot, \cdot)$ pelo TLC” (ou “ $\sim N$ exata”), padronizar, Φ . O TLC não precisa do modelo. As resoluções de 2025/26 não usam correção de continuidade. **Unidades:** 3 anos = 36 meses, 1 hora = 60 min, 350€ = 35000 cênt.

7. Exemplos-tipo resolvidos (exames 2025/26)

Exemplo — Q1 Bayes, ramo negativo (02/02 P1) $P(+ | E) = 0,9$, $P(+ | \bar{E}) = 0,01$, $P(E) = 0,02$. $P(E | \bar{T})$? $P(\bar{T}) = 0,02(0,1) + 0,98(0,99) = 0,9722$; $P(E | \bar{T}) = \frac{0,002}{0,9722} = \mathbf{0,002}$.

Exemplo — Q1 causa mais provável (30/06-C) $P(C_i) = 0,25; 0,375; 0,375$, $P(R | C_i) = 0,8; 0,9; 0,7$. Não atendido rápido: $P(\bar{R}) = 0,2$; posteriores $\frac{0,05}{0,2} = 0,25$, $\frac{0,0375}{0,2} = 0,1875$, $\frac{0,1125}{0,2} = \mathbf{0,5625} \rightarrow C_3$.

Exemplo — Q2 custo por escalões (16/06-A) $P(X = 0..3) = 0,72; 0,18; 0,08; 0,02$. $E = 0,40$, $EX^2 = 0,68$, $\text{Var} = 0,52$; moda = mediana = 0. Custo 4€/defeito, +3€ se $X \geq 2$: $C = 0, 4, 11, 15$; $E[C] = 0,72 + 0,88 + 0,30 = \mathbf{1,90€}$.

Exemplo — Q2 densidade + condicional disfarçada (30/06-A) $f = \frac{3}{8}(x - 2)^2$ em $[2, 4] \Rightarrow F = \frac{(x-2)^3}{8}$. $P(X > 2,6 | X < q_{0,5}) = \frac{0,5 - 0,027}{0,5} = \mathbf{0,946}$.

Exemplo — Q3 pista + dois níveis (02/02 P2) Poi , $P(X = 3) = P(X = 4) \Rightarrow \lambda = 4$; $p = P(X = 0) = e^{-4} = 0,0183$. Em 10 anos, $W \sim Bi(10; 0,0183)$: $P(W < 3) = F_W(2) = \mathbf{0,9993}$.

Exemplo — Q3 uniforme + binomial condicional (16/06-A) $U(-\alpha, \alpha)$, $\text{Var} = 3 \Rightarrow \alpha = 3$; $p = P(|X| > 0,6) = 0,8$. $Y \sim Bi(4; 0,8)$: $P(Y \geq 3 | Y \geq 1) = \frac{0,8192}{0,9984} = \mathbf{0,8205}$.

Exemplo — Q3 amnésia + mediana (30/06-C) $Exp(0,02)$: $P(X > 50 | X > 30) = P(X > 20) = e^{-0,4} = \mathbf{0,6703}$; mediana $\frac{\ln 2}{0,02} = \mathbf{34,66\text{ h}}$ (< média 50).

Exemplo — Q4 construir a conjunta (19/01 P4) $P(X = 1, 2, 3) = 0,2; 0,5; 0,3$; $P(Y = -2 | X = x) = 0,9; 0,5; 0,3$. $f(x, -2) = 0,18; 0,25; 0,09$; $f_Y(-2) = 0,52$; $E[X | Y = -2] = \frac{0,18 + 0,50 + 0,27}{0,52} = \mathbf{1,827}$.

Exemplo — Q4 correlação numa tabela (30/06-A) Linhas $R = 0, 1, 2$: $(0,40; 0; 0)$, $(0,25; 0,10; 0)$, $(0,10; 0,10; 0,05)$, colunas $T = 0, 1, 2$. $f_R = 0,40; 0,35; 0,25$, $f_T = 0,75; 0,20; 0,05$; $\text{Var} R = 1,35 - 0,85^2 = 0,6275$, $\text{Var} T = 0,4 - 0,09 = 0,31$; $E[RT] = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$; $\text{Cov} = 0,5 - 0,255 = 0,245$; $\text{Corr} = \mathbf{0,556}$. $f(0, 2) = 0 \neq 0,02 \Rightarrow$ dependentes.

Exemplo — Q4 densidade no quadrado (02/02 P3) $f = x + y$ em $[0, 1]^2$: $f_X = x + \frac{1}{2}$, $EX = EY = \frac{7}{12}$, $E[XY] = \frac{1}{3}$, $\text{Cov} = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144} \neq 0 \Rightarrow$ dependentes.

Exemplo — Q5 normais e TLC (19/01 P5, 02/02 P4) $W = 3X - 2Y$, $X \sim N(10, 4)$, $Y \sim N(5, 9)$: $W \sim N(20, 72)$, $P(W > 0) = \Phi(2,357) = \mathbf{0,991}$. 36 meses com $E = 2,5$, $DP = 3$: $S \stackrel{d}{\sim} N(90, 324)$, $P(S > 100) \approx 1 - \Phi(0,556) = \mathbf{0,29}$.

8. Checklist: que ferramenta usar e erros a evitar

Sintoma no enunciado	Ferramenta
“pelo menos um”, “nenhum”	complementar + De Morgan
3 acontecimentos sobrepostos	inclusão–exclusão a 3 (Venn)
subpopulações + % global	probabilidade total (árvore)
“sabendo que deu... , ter sido...”	Bayes
sem reposição, fases sucessivas	composta (cadeia)
série / paralelo	$\prod p_i / 1 - \prod(1 - p_i)$
“...sabendo que...” com $A \subset B$	$P(A)/P(B)$
F em escada	$f =$ saltos
f com constante k	$\sum f = 1$ ou $\int f = 1$
custo/tempo função de X	tabela de $g(x) \rightarrow E[g(X)]$
mediana, quartil, “em 95 %”	$F(q) = p$ no troço certo
“já esperou/resistiu...”	amnésia (só Geo/Exp)
“em quantos dos $n...$ ”	dois níveis: $p \rightarrow Bi(n, p)$
média e desvio dados	normal: padronizar
tabela de dupla entrada	marginais $\rightarrow$ condic. $\rightarrow$ Cov $\rightarrow$ indep.
densidade conjunta	desenhar suporte $\rightarrow$ integrar
“são independentes?”	1 célula $f \neq f_X f_Y$, Cov $\neq 0$, suporte
combinação de normais indep.	normal exata, $\sum c_i^2 \text{Var}$
soma/média de muitas i.i.d.	TLC

8.1 Estratégia (60 min)
(1) 2 min: ler tudo, marcar EM “de 1 linha” (série/paralelo, amnésia, soma de normais, TLC). (2) EM primeiro (~8 min cada): conta completa e confronto com as opções — os distratores são os erros clássicos. (3) Abertas (~15 min): 1.ª linha = **v.a. + distribuição + parâmetros**. (4) 5 min finais: unidades, σ vs σ^2 , EM todas assinaladas. **Penalização:** palpite aleatório vale $0,25(2) - 0,75(0,5) = +0,125$; eliminando uma opção, $+0,33 \Rightarrow$ **nunca deixar EM em branco**.

- 8.2 Erros a evitar**
- Confundir $P(A | B)$ com $P(B | A)$; usar o ramo T quando pedem $\bar{T}$.
 - Disjuntos $\Rightarrow$ independentes $\times$ (são dependentes). Somar não disjuntos sem subtrair a interseção.
 - Discreta: $< \text{vs} \leq (7 \leq X \leq 12 \text{ é } F(12) - F(6))$.
 - $\text{Var}[aX + b] = a \text{Var} X \times \rightarrow a^2 \text{Var} X$. $E[g(X)] = g(E[X]) \times$.
 - Exponencial: $\lambda =$ média $\times \rightarrow \lambda = 1/E[X]$. Poisson: reescalar λ ao intervalo.
 - Normal: “ $DP = 3$ ” $\Rightarrow \text{Var} = 9$; dividir por σ , não por σ^2 .
 - Amnésia na uniforme $\times$. Cov = 0 $\Rightarrow$ independentes $\times$.
 - $\text{Var}[X - Y] = \text{Var} X - \text{Var} Y \times \rightarrow$ **soma**. $\text{Var}[2X] = \text{Var}[X_1 + X_2] \times$.
 - TLC: média com σ^2 em vez de σ^2/n ; esquecer “aproximadamente, pelo TLC”.
 - Unidades: meses $\leftrightarrow$ anos, min $\leftrightarrow$ h, centenas de h, cêntimos.