

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Leis de conservação: forma integral

Conteúdo da Aula

- Breve revisão da aula anterior
- Princípio de conservação da energia
- Carga hidráulica
 - Exemplo 4.11
 - Exemplo 4.6

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Angular

- Para volume de controlo fixo e indeformável,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} [\rho(\vec{x} \times \vec{u})] d\forall}_{-\vec{\Gamma}_I} + \underbrace{\int_{S_c} \rho(\vec{x} \times \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{-\vec{\Gamma}_{M_1} + \vec{\Gamma}_{M_2}} = \underbrace{\int_{\forall_c} \rho(\vec{x} \times \vec{g}) d\forall}_{\vec{\Gamma}_G} + \underbrace{\int_{S_c} \vec{x} \times \vec{P}_s dS}_{\vec{\Gamma}_\Pi}$$

pode ser escrito

$$\vec{\Gamma}_G + \vec{\Gamma}_\Pi + \vec{\Gamma}_I + \vec{\Gamma}_{M_1} - \vec{\Gamma}_{M_2} = 0$$

- Γ_G = momento (ou binário) resultante das forças mássicas
- Γ_Π = momento resultante das forças de contacto aplicadas na superfície de controlo
- Γ_I = momento resultante das forças de inércia (nulo para escoamentos permanentes)
- Γ_{M1}, Γ_{M2} = momentos resultantes dos fluxos de quantidade de movimento, respetivamente, nas secções de entrada 1 e de saída 2 do volume de controlo

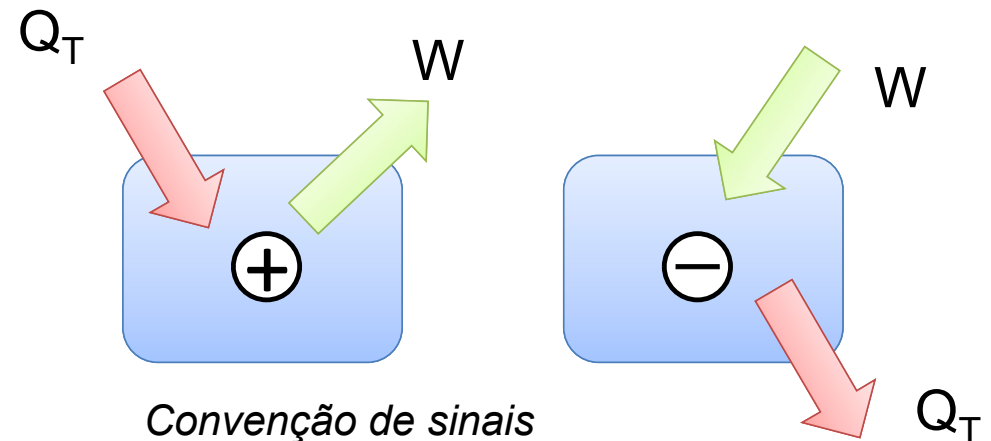
Princípio de Conservação da Energia

- Lei da conservação de energia (1.ª lei da Termodinâmica)

$$\frac{DE_s}{Dt} = \frac{dQ_T}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

- Sendo

- E_s = energia total do sistema material
- Q_T = energia térmica transferida sob a forma de calor através de superfície do sistema (convenciona-se **recebida +** e **emitida -**)
- W = energia mecânica ou o trabalho cedido ou recebido pelo sistema material (convenciona-se trabalho **realizado +** e **recebido -**)



Princípio de Conservação da Energia

- Energia total do sistema material ($\mathbf{B} = E_s$, $b = e$)

$$E_s = \int_{\forall_s} \rho e d\forall$$

- sendo e = energia total por unidade de massa:

$$e = \frac{|\vec{u}|^2}{2} + g z + \tilde{u},$$

- $u^2/2$ = **energia cinética** por unidade de massa, associada ao movimento macroscópico das partículas com uma determinada velocidade: $|\vec{u}| = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$
- gz = **energia potencial gravítica** por unidade de massa, associada à posição das partículas no campo gravítico;
- $\tilde{u}$ = **energia interna** por unidade de massa, associada ao movimento molecular e à temperatura do fluido, correspondendo à forma térmica da energia.

Princípio de Conservação da Energia

- Lei da conservação

$$\frac{D\mathbf{E}_s}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \mathbf{e} d\forall = \frac{dQ_T}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

sendo

E_s = energia total;

Q_T = energia térmica recebida (+)

W = trabalho realizado (+)

e = energia por unid. de massa $\mathbf{e} = \frac{|\vec{u}|^2}{2} + g z + \tilde{u}$,

- Aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds
($\mathbf{B} = E_s$, $\mathbf{b} = e$ e $\mathbf{F}_B = dQ/dt - dW/dt$),

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + g z + \tilde{u} \right) d\forall + \int_{S_c} \rho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + g z + \tilde{u} \right) (\vec{u}_r \cdot \vec{n}) dS = \frac{dQ_T}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

Princípio de Conservação da Energia

- Pode-se mostrar que (livro, p. 205 – 208):

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + gz \right) \right] dV}_{1} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{2} = \underbrace{-\frac{dE_T}{dt}}_3 \underbrace{-\frac{dW_\eta}{dt} - \frac{dW_\tau}{dt}}_4 \underbrace{-\frac{dW_v}{dt}}_5$$

1 = variação da energia mecânica por unidade de volume **integrada no volume de controlo**

2 = soma do fluxo da energia mecânica com o trabalho por unidade de tempo realizado pelas forças de pressão através da S_c (incluindo as que decorrem do deslocamento ou da deformação do próprio volume de controlo).

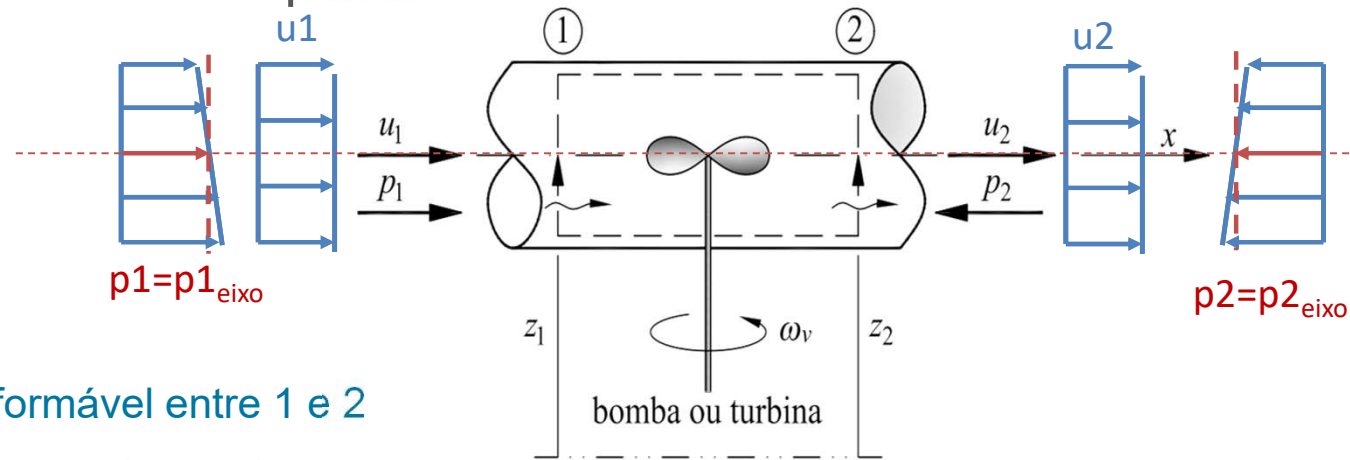
3 = potência térmica associada às trocas de calor e à variação de energia interna.

4 = potência associada ao trabalho de forças normais de natureza viscosa e forças tangenciais

5 = potência associada à atuação de máquinas hidráulicas ou veios no interior do V_c

Conceito | Carga hidráulica

- Trecho de conduta com uma turbomáquina.



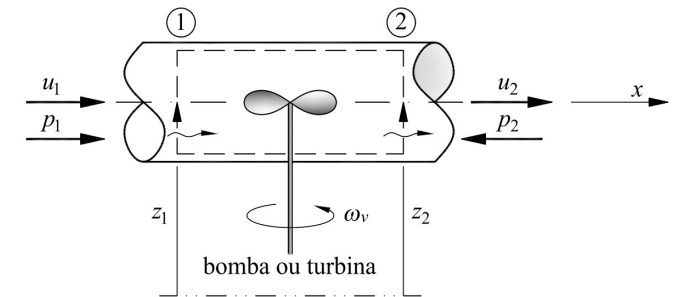
- Admitindo:

- Volume de controlo fixo e indeformável entre 1 e 2
- Distribuição uniforme de velocidades (u_1 e u_2)
- Distribuição hidrostática de pressões (valor médio = pressão no eixo: p_1 e p_2)
- Escoamento permanente
- Fluido homogéneo e praticamente incompressível ($\rho = \text{cte}$)
- Eixo da conduta horizontal
- Tensões tangenciais viscosas desprezáveis

Conceito | Carga hidráulica

A equação da conservação da energia vem (livro, p. 212):

$$\int_{S_1+S_2} \rho \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{u} | \vec{n}) dS = -\frac{dE_T}{dt} - \frac{dW_v}{dt}$$



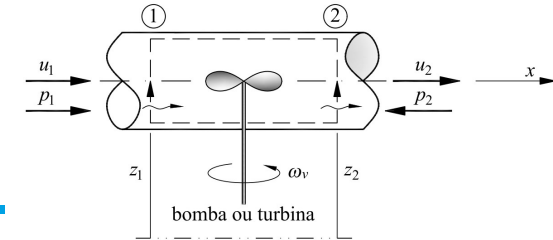
$$-\rho \left(\frac{u_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) u_1 S_1 + \rho \left(\frac{u_2^2}{2} + gz + \frac{p_2}{\rho} \right) u_2 S_2 = -\frac{dE_T}{dt} - \frac{dW_v}{dt}$$

$$\times \frac{1}{\gamma Q}$$

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 = Q$$

$$\left(\frac{u_2^2}{2g} + z + \frac{p_2}{\gamma} \right) - \left(\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = -\frac{1}{\gamma Q} \left(\frac{dE_T}{dt} + \frac{dW_v}{dt} \right)$$

Conceito | Carga hidráulica



- Define-se **carga hidráulica** do escoamento

$$H = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{u^2}{2g}$$

(são energias por unidade de peso do fluido; são alturas, geralmente expressas em mc.a.)

sendo

energia mecânica por unidade de peso do fluido

- p/γ = altura piezométrica
 - parcela estática da potência associada ao trabalho realizado pelo escoamento sob a ação das forças de pressão, por unidade de peso do fluido
- z = cota geométrica
 - energia potencial gravítica por unidade de peso do fluido
- $u^2/2g$ = altura cinética
 - energia cinética por unidade de peso do fluido

Qual diferença entre **carga hidráulica** e **energia mecânica** por unidade de peso do fluido?

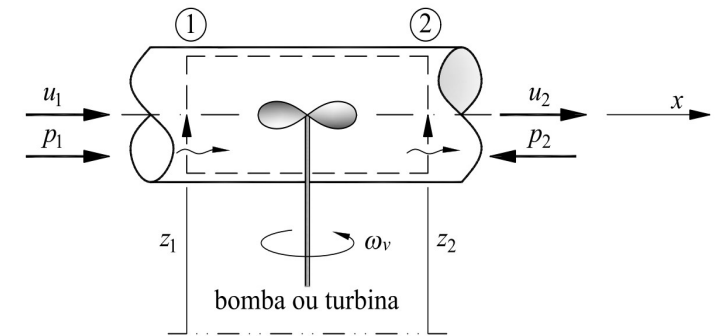
Conceito | Carga hidráulica

- Continuando...

$$\left(\frac{u_2^2}{2g} + z + \frac{p_2}{\gamma} \right) - \left(\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = -\frac{1}{\gamma Q} \left(\frac{dE_T}{dt} + \frac{dW_v}{dt} \right)$$



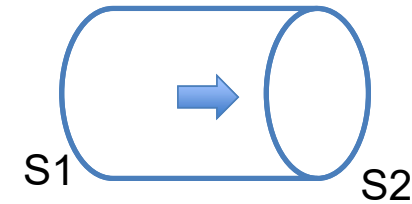
$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{\gamma Q} \left(\frac{dE_T}{dt} + \frac{dW_v}{dt} \right)$$



- Se a conduta for curta, a potência térmica é << do que a potência associada ao veio $\Rightarrow dE_T/dt$ é desprezável

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{\gamma Q} \frac{dW_v}{dt} = \Delta H_v$$

Aplicação | Exemplo



■ Conduita sem turbomáquina

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{\gamma Q} \left(\frac{dE_T}{dt} + \cancel{\frac{dW_v}{dt}} \right) \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = \gamma Q (H_1 - H_2)$$

■ Dados:

- $H_1 = 30 \text{ m}$; $H_2 = 20 \text{ m}$; $L = 100 \text{ m}$; $Q = 1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $\gamma = 9800 \text{ Nm}^{-3}$

- **Taxa temporal de dissipação de energia**
(potência térmica associada às trocas de calor e à variação de energia interna)

$$\frac{dE_T}{dt} = \gamma Q (H_1 - H_2) = 9800(30 - 20) = 98\,000 \text{ Nms}^{-1}(\text{Js}^{-1})$$

- **Taxa de dissipação de energia por unidade de percurso**

$$\frac{dE_T}{dx} = \frac{dE_T / dt}{dx / dt} = \frac{dE_T / dt}{u} = \frac{dE_T / dt}{Q / S} = 98\,000 \text{ Jm}^{-1}$$

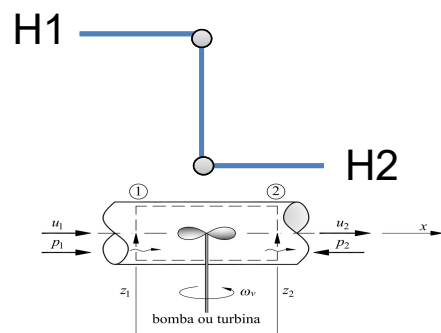
- **Perda de carga hidráulica por unidade de percurso**

$$J = \frac{H_1 - H_2}{L} = \frac{30 - 20}{100} = 0,1 \text{ m/m}$$

Conceito | Potências do escoamento

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{\gamma Q} \frac{dW_v}{dt} = -\Delta H_v$$

- Se turbina (*realiza trabalho*)



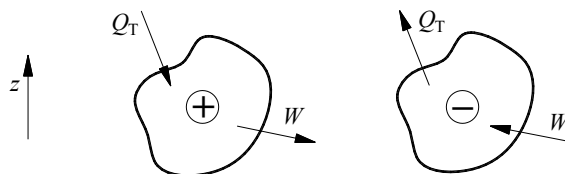
$$\Delta H_v = H_1 - H_2 > 0 \text{ e}$$

$$\Delta H_v = H_u \text{ (queda útil da turbina)}$$

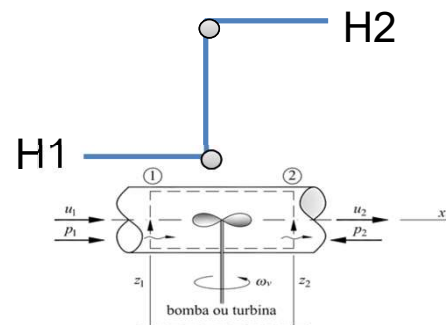
$$\frac{dW_v}{dt} = P_{h(turbina)}$$

(trabalho positivo porque representa trabalho realizado pelo sistema)

$$P_h = \gamma Q H_u$$



- Se bomba (*recebe trabalho*)



$$\Delta H_v = H_1 - H_2 < 0 \text{ e}$$

$$\Delta H_v = -H_t \text{ (altura de elevação da bomba)}$$

$$\frac{dW_v}{dt} = -P_{h(bomba)}$$

(trabalho negativo porque representa trabalho recebido pelo sistema)

$$P_h = \gamma Q H_t$$

Potência hidráulica do escoamento

Exemplo 4.11

Uma pequena turbina de água, conforme o esquema da Figura 4.24, extrai do escoamento 7,7 kW de potência.

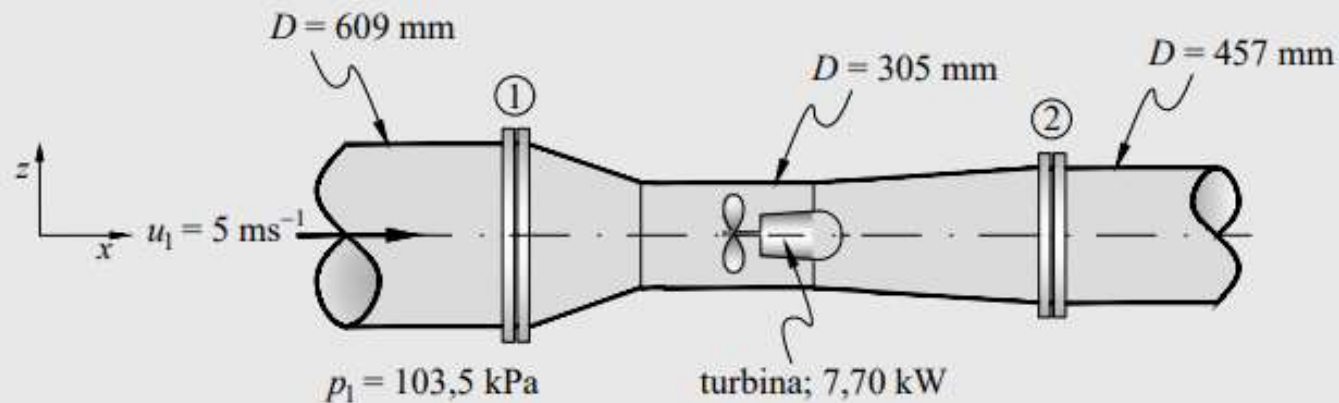


Figura 4.24

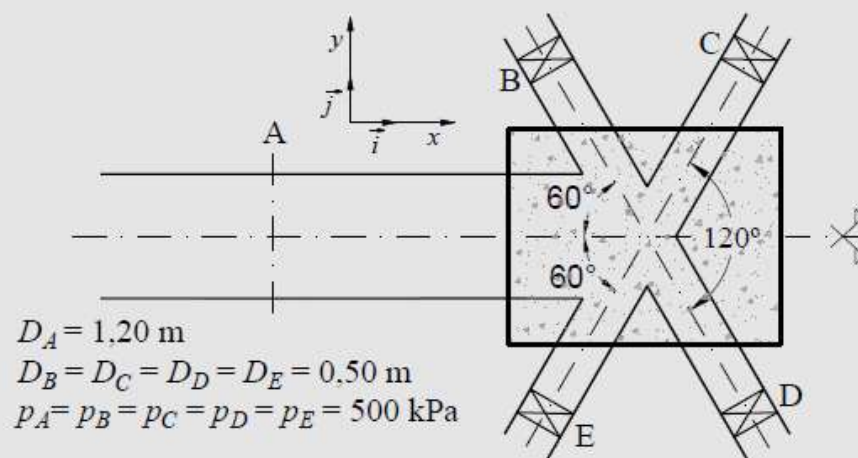
Determine a força horizontal provocada pelo escoamento no invólucro em que se apoia a turbina, desprezando a variação da energia E_T , os trabalhos das forças dissipativas nas superfícies abertas e as perdas de energia na turbina.

Exemplo 4.6

Calcule a força a que está sujeito o maciço de amarração da bifurcação de eixos horizontais representada, em planta, na Figura 4.12, nas seguintes condições de funcionamento:

- quando as válvulas instaladas em B, C, D e E se encontram fechadas e a bifurcação está cheia de água;
- quando as válvulas em B e E se encontram fechadas e por cada uma das secções C e D se escoam $3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ de água.

Admita que nas superfícies abertas as tensões normais viscosas são desprezáveis (pelo que as tensões normais se reduzem a pressões hidrostáticas) e que as distribuições de velocidades são uniformes. Despreze o peso da água.



Estudo autónomo

- Estudar
 - Secção 4.7
 - Exemplos 4.12, 4.13 e 4.14
- Resolver
 - Problemas 4.10 e 4.11