

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Leis de conservação: forma integral

Conteúdo da Aula

- Breve revisão da aula anterior
 - Problema 4.2
- Princípio de conservação da quantidade de movimento angular
 - Exemplo 4.9

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Significado físico das parcelas

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS$$

- Termo I: variação temporal da quantidade de mov. por unid.de volume, $\rho \vec{u}$, dentro do V_c
- Termo II: variação temporal da quantidade de movimento associada ao deslocamento ou deformação do V_c
 - Termo I+II: variação temporal da quantidade de movimento total do volume de controlo
- Termo III: fluxo de quantidade de movimento através da superfície de controlo

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Para volume de controlo fixo e indeformável e desprezando as tensões normais viscosas:

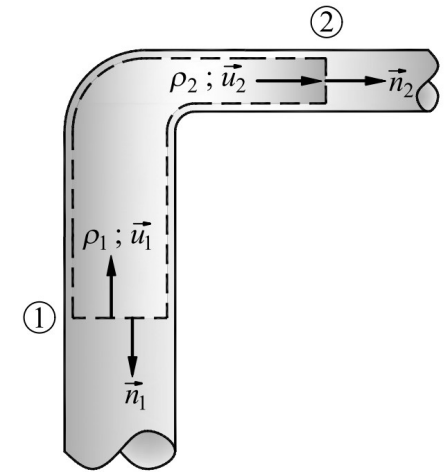
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV + \int_{S_c} (-p \vec{n} + \vec{\tau}) dS$$

- Teorema de Euler (Vc fixo e indeformável e fluido único)

$$-\vec{I} + \vec{M}_2 - \vec{M}_1 = \vec{G} + \vec{\Pi} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0$$

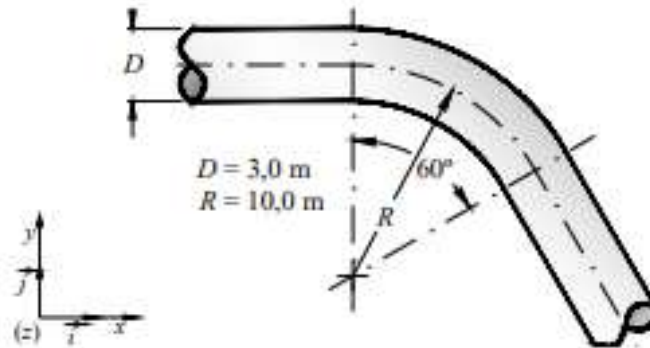
sendo

- $\vec{G}$ = peso;
- $\vec{\Pi}$ = forças de contacto nas superfícies abertas e fechadas
- $\vec{I}$ = força local de inércia
- $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$ = fluxos de quantidade de movimento em todas as entradas (1) e saídas (2)



Problema 4.2

Numa galeria circular em pressão, com 3,0 m de diâmetro, escoam-se $25 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ de água. A galeria, representada na Figura 4.30, tem inserida uma curva de eixo horizontal, de raio igual a 10 m e ângulo ao centro igual a 60° , na qual a altura piezométrica se pode considerar constante e igual a 100 m. Determine a força sobre o trecho curvo da galeria nos seguintes casos:



- a) quando se dá o escoamento atrás referido;
- b) quando não há escoamento em virtude de a galeria ser obturada por uma comporta situada a jusante da curva;
- c) quando a obturação se faz na secção de saída da curva.

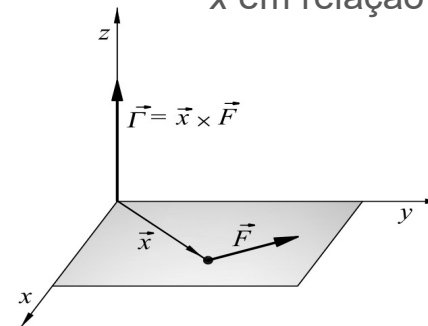
Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Angular

- Lei da conservação

$$\frac{D\vec{\Gamma}_m}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho(\vec{x} \times \vec{u}) d\forall = \sum_i \vec{\Gamma}_i$$

sendo Γ_m = quantidade de movimento angular do sistema material em relação ao ponto O (convencionado a origem do referencial)

Γ – **momento angular** gerado por uma força genérica F contida no plano xy aplicada numa partícula com vetor posição x em relação à origem, O.



- Aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds ($\mathbf{B} = \Gamma_m$, $b = x \times u$ e $\mathbf{F}_B = \sum_i \vec{\Gamma}_i$),

$$\frac{D\vec{\Gamma}_m}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho(\vec{x} \times \vec{u}) d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho(\vec{x} \times \vec{u}) d\forall + \int_{S_c} \rho(\vec{x} \times \vec{u})(\vec{u}_r | \vec{n}) dS$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Angular

- Para volume de controlo fixo e indeformável,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} [\rho(\vec{x} \times \vec{u})] d\forall}_{-\vec{\Gamma}_I} + \underbrace{\int_{S_c} \rho(\vec{x} \times \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{-\vec{\Gamma}_{M_1} + \vec{\Gamma}_{M_2}} = \underbrace{\int_{\forall_c} \rho(\vec{x} \times \vec{g}) d\forall}_{\vec{\Gamma}_G} + \underbrace{\int_{S_c} \vec{x} \times \vec{P}_s dS}_{\vec{\Gamma}_\Pi}$$

pode ser escrito

$$\vec{\Gamma}_G + \vec{\Gamma}_\Pi + \vec{\Gamma}_I + \vec{\Gamma}_{M_1} - \vec{\Gamma}_{M_2} = 0$$

- Γ_G = momento (ou binário) resultante das forças mássicas
- Γ_Π = momento resultante das forças de contacto aplicadas na superfície de controlo
- Γ_I = momento resultante das forças de inércia (nulo para escoamentos permanentes)
- Γ_{M1}, Γ_{M2} = momentos resultantes dos fluxos de quantidade de movimento, respetivamente, nas secções de entrada 1 e de saída 2 do volume de controlo

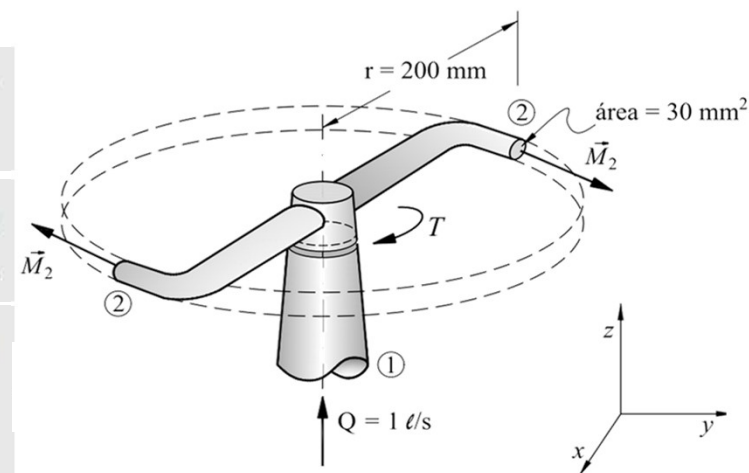
Exemplo 4.9

Um torniquete de rega com dois bocais de saída, representado na Figura 4.20, é alimentado na base por um caudal de água igual a 1 l s^{-1} .

A área de saída de cada bocal do torniquete é 30 mm^2 . A água sai dos bocais para a atmosfera segundo a direção normal à respetiva secção transversal. A distância entre o eixo de rotação (vertical) do torniquete e os centros das secções dos bocais, r , é 200 mm . O regime de escoamento é permanente (*i.e.*, caudal e velocidade de rotação constantes no tempo).

Nestas condições, determine:

- a velocidade relativa, o caudal e o caudal mássico à saída de cada bocal;
- o momento torsor mecânico ou de atrito, Γ_R , necessário para manter o torniquete parado;



Estudo autónomo

- Estudar
 - Secções 4.6.2
 - Exemplos 4.9
- Resolver
 -