

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Leis de conservação: forma integral

Conteúdo da Aula

- Breve revisão da aula anterior
- Princípio de conservação da quantidade de movimento
 - Problema 4.5
 - Exemplo 4.5

Teorema de transporte de Reynolds

Permite operacionalizar o cálculo da derivada material de uma grandeza extensiva de um sistema material

Descrição lagrangiana

Descrição euleriana

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{B}}{Dt} &\equiv \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \mathbf{b} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \mathbf{b} d\forall + \int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS \\ &= \underbrace{\int_{\forall_c} \frac{\partial \rho \mathbf{b}}{\partial t} d\forall}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III}\end{aligned}$$

- Termo I: variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do volume de controlo
- Termo II: a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ associado ao deslocamento/deformação do V_c
- Termo III: o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo

Princípio de Conservação de Massa

- Significado físico das parcelas

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV}_{I+II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = 0 \quad (\text{Forma 1})$$

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = 0 \quad (\text{Forma 2})$$

- Termo I: variação temporal da massa volúmica dentro do Vc
- Termo II: variação temporal da massa associada ao deslocamento/deformação do Vc
 - Termo I+II: variação temporal da massa no volume de controlo
- Termo III: fluxo da massa através da superfície de controlo

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Lei da conservação (2ª lei de Newton)

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{G} + \vec{\Pi} \quad \text{sendo } \vec{P} = \text{quantidade de movimento do sistema material (mu)}$$

- Aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds ($\mathbf{B} = \vec{P}$, $b = u$ e $\vec{F}_B = \sum \vec{F}_{ext}$),

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \vec{u} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS$$

- e tendo presente a lei de conservação, vem:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

sendo

○ $\vec{G}$ = resultante das forças de massa associada ao V_c $\vec{G} = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall$

○ $\vec{\Pi}$ = resultante das forças de contacto (normais σ e tangenciais τ) na S_c $\vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{P}_s dS = \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS = \int_{S_c} (-p\vec{n} + \vec{\eta} + \vec{\tau}) dS$

p = pressão

η = tensões normais viscosas

τ = tensões tangenciais (viscosas)

vem:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS.$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Volume de controlo genérico:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS \quad (\text{Forma 1})$$

$$\int_{\forall_c} \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS \quad (\text{Forma 2})$$

$$\int_{\forall_c} \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS. \quad (\text{Forma 3})$$

- Volume de controlo fixo e indeformável:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS. \quad (\text{Forma 4})$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Significado físico das parcelas

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV + \int_{S_c} (\vec{\sigma} + \vec{\tau}) dS$$

- Termo I: variação temporal da quantidade de mov. por unid.de volume, $\rho \mathbf{u}$, dentro do V_c
- Termo II: variação temporal da quantidade de movimento associada ao deslocamento ou deformação do V_c
 - Termo I+II: variação temporal da quantidade de movimento total do volume de controlo
- Termo III: fluxo de quantidade de movimento através da superfície de controlo

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Equação vetorial

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (-p \vec{n} + \vec{\eta} + \vec{\tau}) dS$$

- Decomposta em 3 equações definidas cada uma nas direções x, y e z

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho u d\forall + \int_{S_c} \rho u (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho g_x d\forall - \int_{S_c} p n_x dS + \int_{S_c} (\eta_x + \tau_x) dS$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho v d\forall + \int_{S_c} \rho v (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho g_y d\forall - \int_{S_c} p n_y dS + \int_{S_c} (\eta_y + \tau_y) dS$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho w d\forall + \int_{S_c} \rho w (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho g_z d\forall - \int_{S_c} p n_z dS + \int_{S_c} (\eta_z + \tau_z) dS.$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

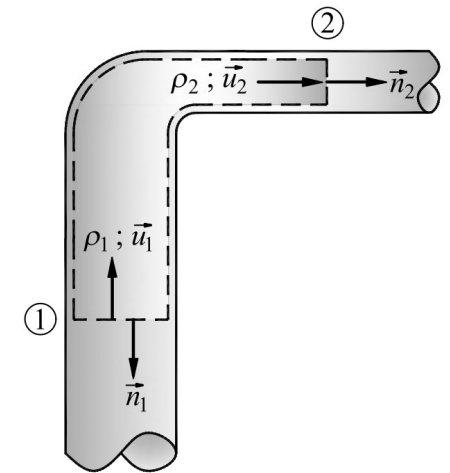
- Para volume de controlo fixo e indeformável e desprezando as tensões normais viscosas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} | \vec{n}) dS = \int_{\forall_c} \rho \vec{g} d\forall + \int_{S_c} (-p\vec{n} + \vec{\tau}) dS$$

- 1º termo = variação instantânea da quantidade de movimento total do volume de controlo ou a variação local da inércia

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho \vec{u} d\forall = -\vec{I}$$

- 2º termo = fluxo da quantidade de movimento através da S_c (para duas secções, uma de entrada e outra de saída com distribuições uniformes de velocidade e massa volúmica)



$$\int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} | \vec{n}) dS = - \int_{S_1} \rho_1 \vec{u}_1 u_1 dS + \int_{S_2} \rho_2 \vec{u}_2 u_2 dS = -\rho_1 Q_1 \vec{u}_1 + \rho_2 Q_2 \vec{u}_2 = -\vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento

- Para volume de controlo fixo e indeformável e desprezando as tensões normais viscosas:

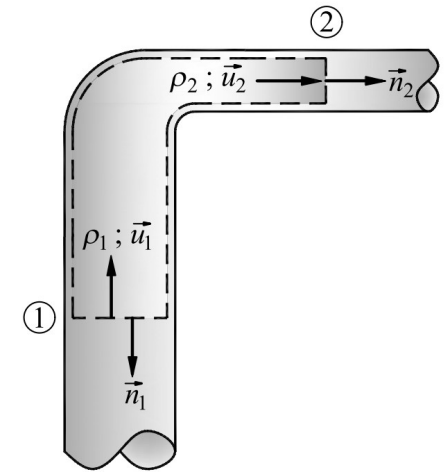
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V_c} \rho \vec{g} dV + \int_{S_c} (-p \vec{n} + \vec{\tau}) dS$$

- Teorema de Euler (Vc fixo e indeformável e fluido único)

$$-\vec{I} + \vec{M}_2 - \vec{M}_1 = \vec{G} + \vec{\Pi} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0$$

sendo

- $\vec{G}$ = peso;
- $\vec{\Pi}$ = forças de contacto nas superfícies abertas e fechadas
- $\vec{I}$ = força local de inércia
- $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$ = fluxos de quantidade de movimento em todas as entradas (1) e saídas (2)



Problema 4.5

Uma conduta horizontal com 30 cm de diâmetro transporta água. A velocidade do escoamento é $0,5 \text{ ms}^{-1}$ na secção 1 (ver Figura 4.33). Dois pequenos tubos verticais introduzem, na conduta principal, 10 l s^{-1} de água cada um.

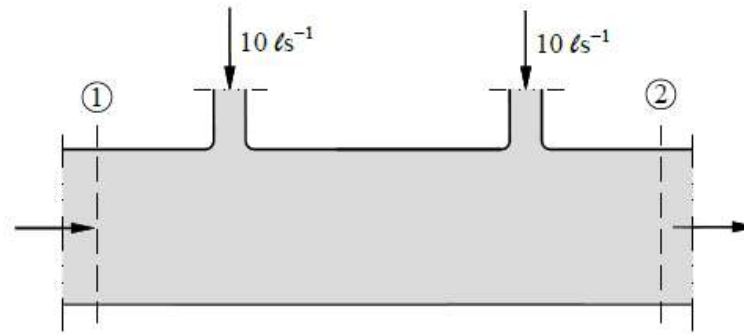


Figura 4.33

Determine a diferença de pressões ($p_1 - p_2$) considerando uniformes as distribuições de pressões e de velocidades, desprezando as tensões de natureza viscosa nas paredes da conduta e tendo em conta que a secção 2 está suficientemente afastada dos tubos verticais.

Exemplo 4.5

O caudal Q entra verticalmente num canal de secção retangular com fundo horizontal e comprimento L , conforme se mostra na Figura 4.10. A largura da secção do canal é B e a altura da água na secção de jusante é h_2 .

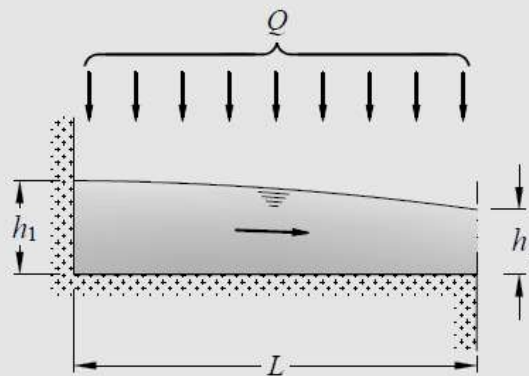


Figura 4.10

Determine a altura do escoamento na secção de montante, h_1 , admitindo que a distribuição de pressões é hidrostática em todas as secções transversais do escoamento, que as tensões normais viscosas, $\vec{\eta}$, e as tensões tangenciais, $\vec{\sigma}_T$, são desprezáveis e que a curvatura da superfície livre é pequena.

Estudo autónomo

- Estudar

- Secções 4.6
- Exemplos 4.1 a 4.7

- Resolver

-