

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Leis de conservação: forma integral

Conteúdo da Aula

- Conceitos: sistema material e volume de controlo
- Forma geral das equações de conservação
- Teorema de transporte de Reynolds
- Princípio de conservação de massa
 - Problema 4.1a,b

Introdução

- Fluidos em movimento
 - sujeitos às mesmas leis da Física que os corpos rígidos
- Estudo do movimento de um fluido é complexo
- Porquê?
 - Porque grandezas como a velocidade, a pressão ou as propriedades do fluido (e.g. a massa volúmica) podem variar de partícula para partícula
- Uma abordagem
 - Selecionar e estudar volumes finitos ou macroscópicos do fluido e a aplicação de leis da Física a esses volumes finitos.
 - Trata-se da análise de escoamentos sob a forma integral

Motivação (Castelo do Bode, Portugal)



Conceitos

- Sistema material

- conjunto selecionado de partículas contíguas de matéria fluida, separado do exterior por uma fronteira fechada ou aberta, real ou fictícia.

- Volume de controlo (V_c)

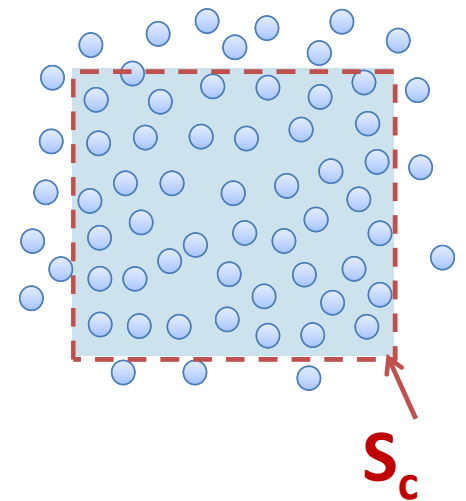


- uma porção do espaço limitada por uma superfície contínua e diferenciável em quase toda a parte, S_c , tendo o respetivo interior totalmente preenchido por um ou mais fluidos.

- Superfície de controlo (S_c)



- pode ser fixa ou móvel,
- pode coincidir ou não com uma fronteira ou parede sólida, permeável ou impermeável.



Conceitos



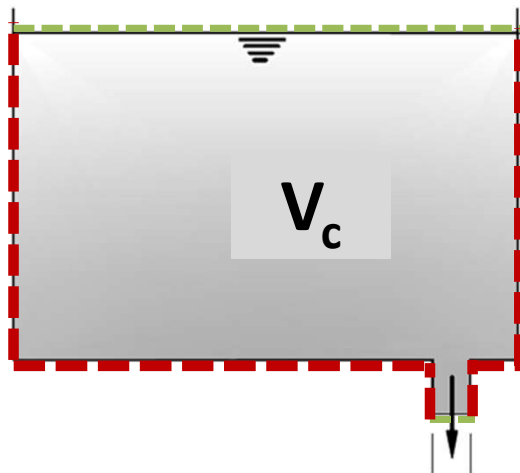
S_c aberta (permeável)



S_c fechada (impermeável)
coincidente com a parede
do(a) reservatório/conduto

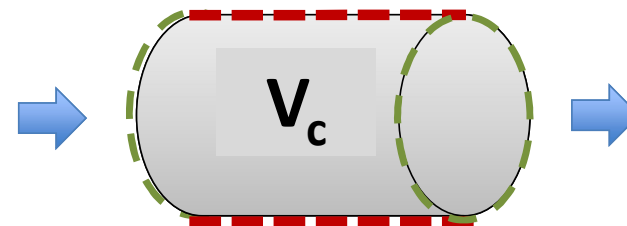
- Exemplos de volumes  e superfícies de controlo 

Escoamento através de um orifício
de um reservatório



Em escoamentos variáveis com superfície livre, que se caracterizam pela existência de uma interface móvel entre dois fluidos (ar - água), a superfície de controlo pode acompanhar essa interface ao longo do tempo.

Escoamento numa conduta



Em escoamentos permanentes (e.g. condutas), é frequente a escolha de volumes de controlo fixos e indeformáveis.

Forma geral das leis de conservação

- Na Física Newtoniana, são três os principais princípios de conservação

- Conservação de massa (m)

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

- Conservação de quantidade de movimento ($\mathbf{P} = m \times \mathbf{u}$)

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{D(m\vec{u})}{Dt} = \sum \vec{F}$$

- Conservação de energia (E)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{dQ_T}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

Forma geral das leis de conservação

- Formulação geral (*aplicado aos fluidos, i.e., a um sistema material*)

$$\frac{DB}{Dt} = \mathbf{F}_B \quad \text{sendo} \quad \mathbf{B} = \int_{\forall_s} \rho \mathbf{b} d\forall \quad \Rightarrow \quad \frac{DB}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \mathbf{b} d\forall = \mathbf{F}_B$$

B : Propriedade extensiva

grandeza física que depende da massa (tensor, vetor, escalar). **Ex:** m , $m \times \mathbf{u}$, E

b : Propriedade intensiva = grandeza física por unidade de massa. **Ex:** 1 , u , e

F_B : Termo de fonte de perturbação. **Exemplo:** 0 , F ou $(dQ/dt - dW/dt)$

Teorema de transporte de Reynolds

Permite operacionalizar o cálculo da derivada material de uma grandeza extensiva de um sistema material.

Descrição lagrangiana

Descrição euleriana

$$\begin{aligned}\frac{DB}{Dt} &\equiv \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \mathbf{b} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \mathbf{b} d\forall + \int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS \\ &= \int_{\forall_c} \frac{\partial \rho \mathbf{b}}{\partial t} d\forall + \int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS + \int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS\end{aligned}$$

sendo $\vec{u}_s$ = a velocidade de deformação/deslocamento da S_c ;

$\vec{u}_r$ = a velocidade do fluido em relação à S_c ;

$$\vec{u} = \vec{u}_s + \vec{u}_r$$

Teorema de transporte de Reynolds

Permite operacionalizar o cálculo da derivada material de uma grandeza extensiva de um sistema material

Descrição lagrangiana

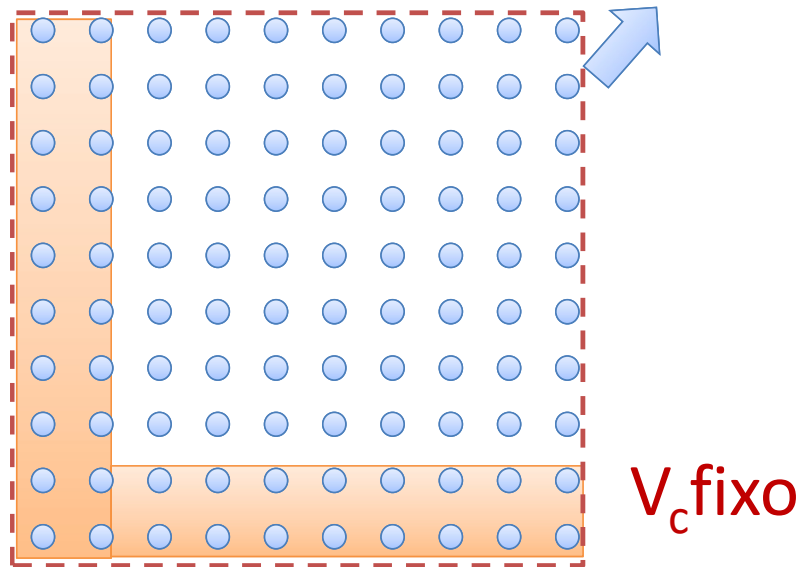
Descrição euleriana

$$\begin{aligned}\frac{DB}{Dt} &\equiv \frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho \mathbf{b} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho \mathbf{b} d\forall + \int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS \\ &= \underbrace{\int_{\forall_c} \frac{\partial \rho \mathbf{b}}{\partial t} d\forall}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{b} (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III}\end{aligned}$$

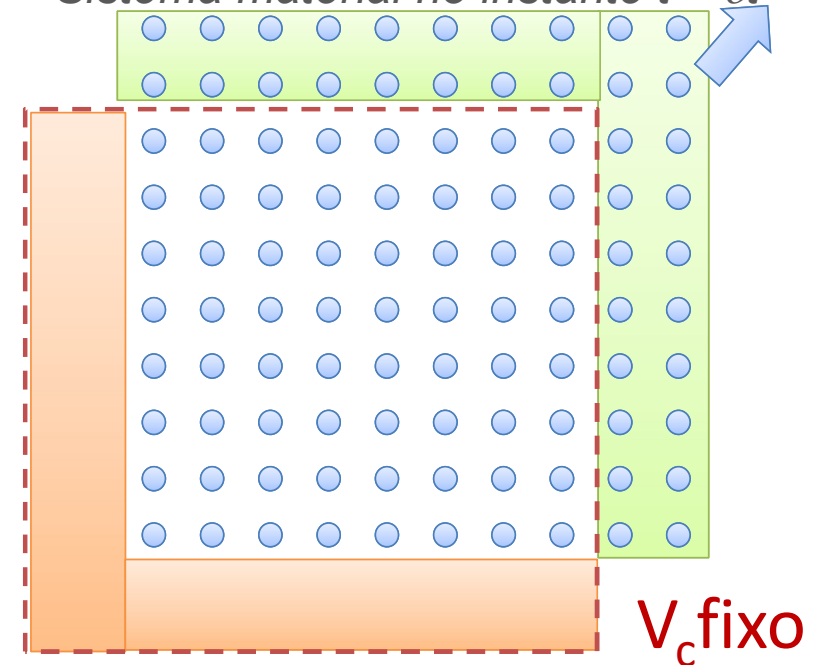
- Termo I: variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do volume de controlo
- Termo II: a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ associado ao deslocamento/deformação do V_c
- Termo III: o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo

Teorema de transporte de Reynolds | Volume de controlo fixo

- *Sistema material no instante t*



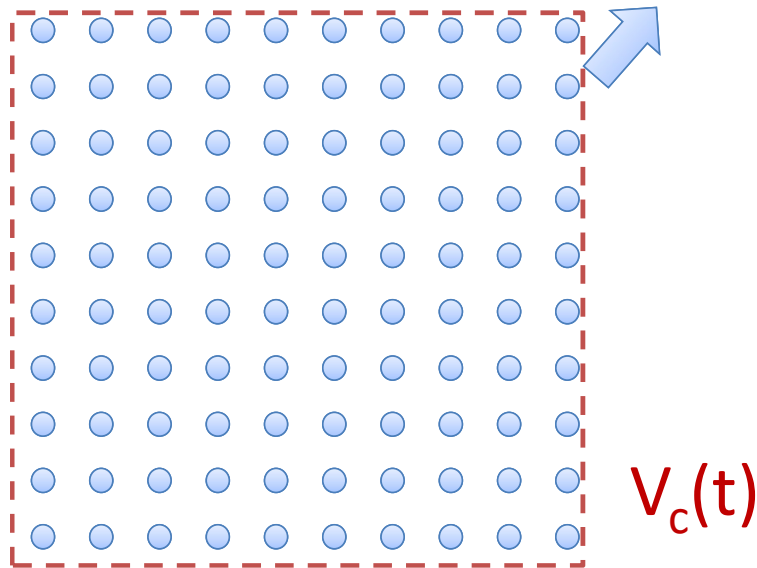
- *Sistema material no instante $t + \delta t$*



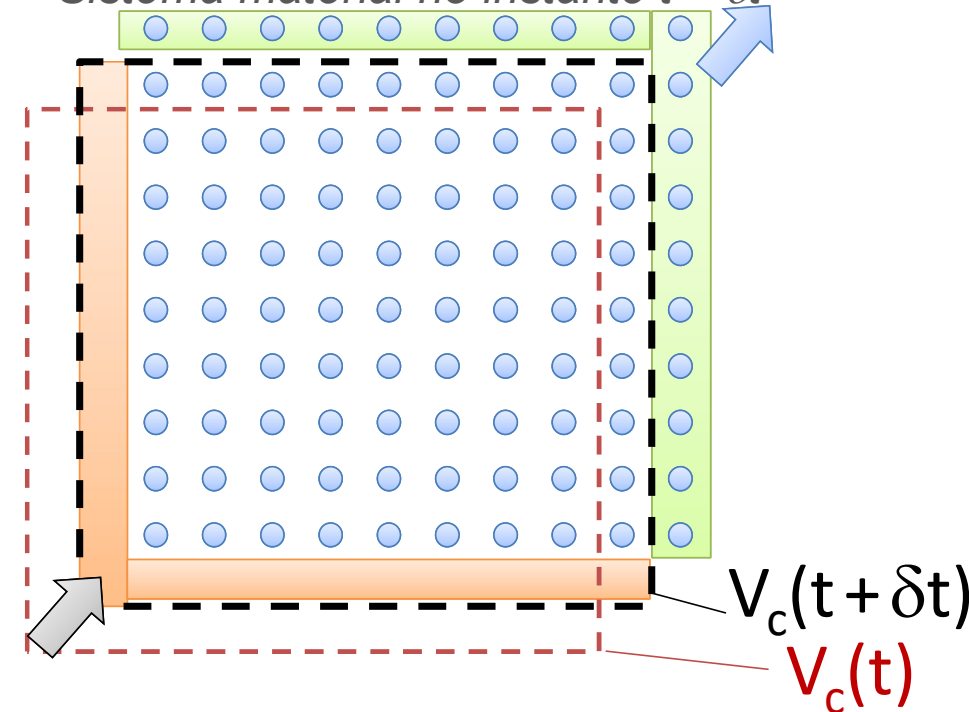
▪ <u>Termo I</u> : variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do V_c	- 36
▪ <u>Termo II</u> : a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ assoc. à deformação do V_c	0
▪ <u>Termo III</u> : o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo	+ 36

Teorema de transporte de Reynolds | Volume de controlo móvel

- *Sistema material no instante t*



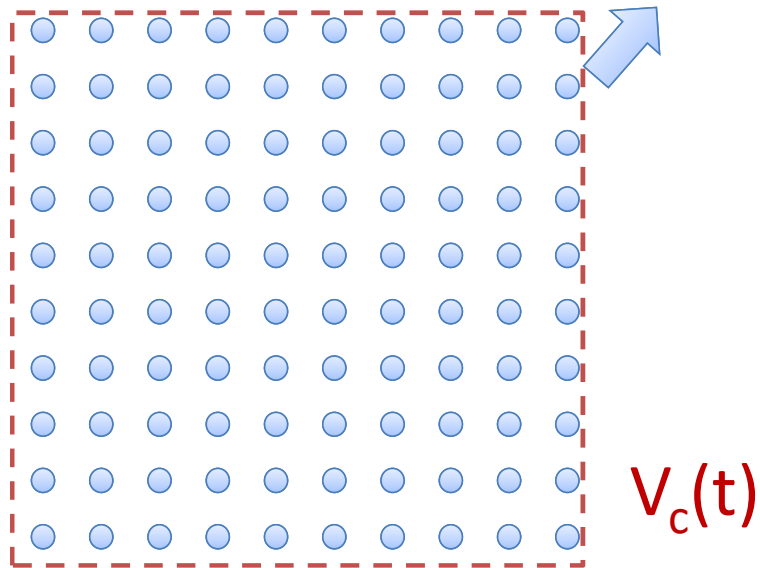
- *Sistema material no instante $t + \delta t$*



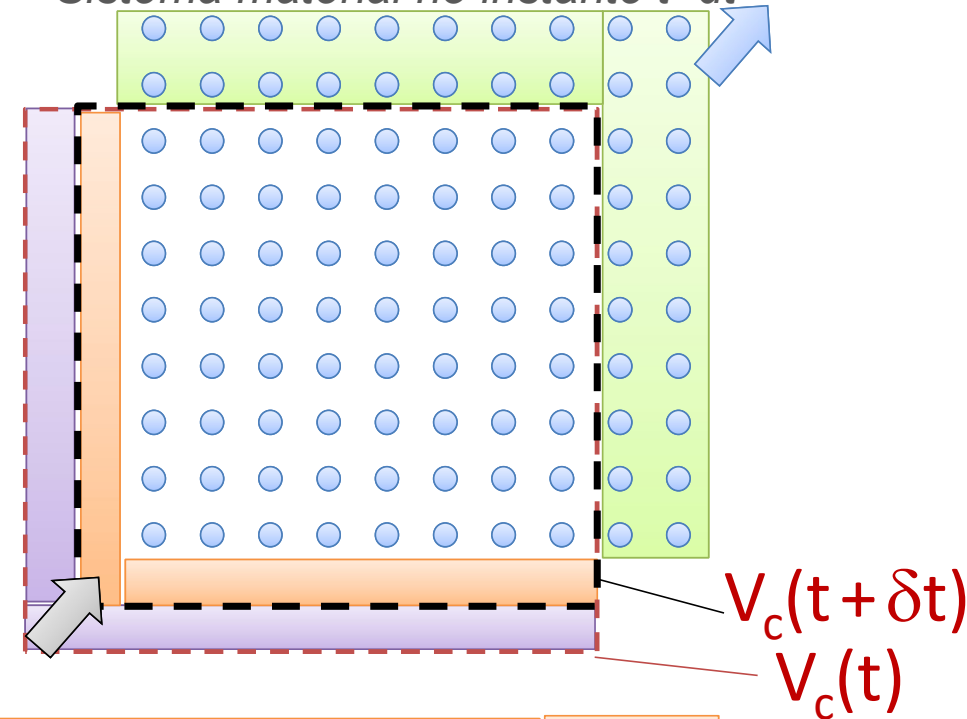
▪ <u>Termo I</u> : variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do V_c	- 19
▪ <u>Termo II</u> : a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ assoc. à deformação do V_c	+ 0
▪ <u>Termo III</u> : o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo	+ 19

Teorema de transporte de Reynolds | Vol. de controlo móvel e deformável

- *Sistema material no instante t*



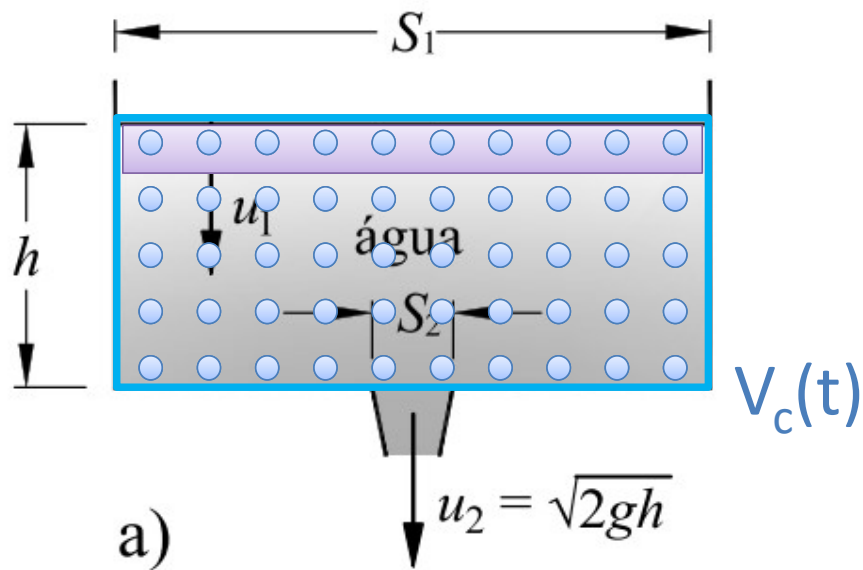
- *Sistema material no instante $t+dt$*



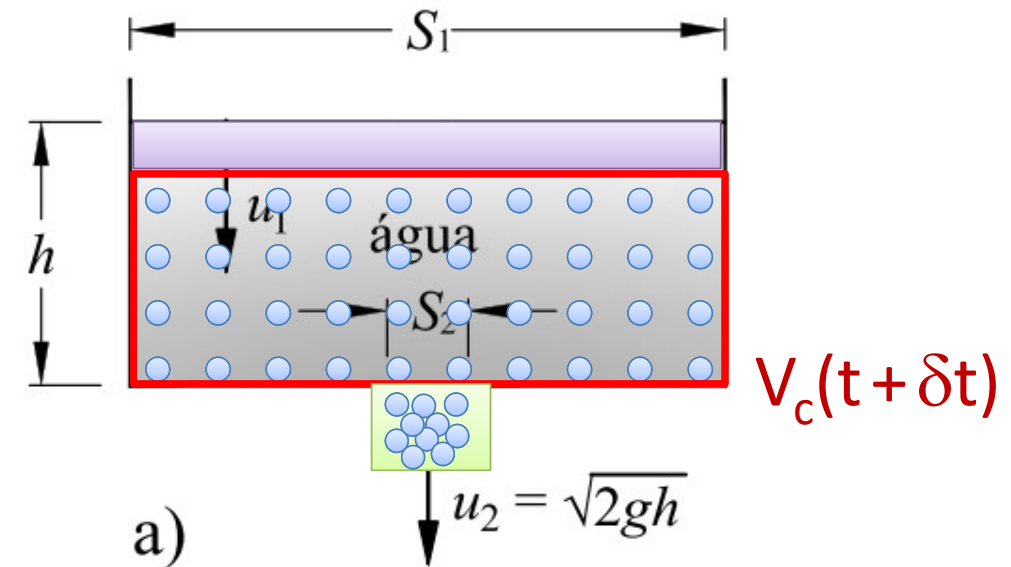
▪ <u>Termo I</u> : variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do V_c	- 17
▪ <u>Termo II</u> : a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ assoc. à deformação do V_c	- 19
▪ <u>Termo III</u> : o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo	+ 36

Teorema de transporte de Reynolds | Problema 4.1a) V_c deformável

- Sistema material no instante t



- Sistema material no instante $t + \delta t$



Termo I: variação temporal da grandeza $\rho \mathbf{b}$ dentro do V_c ($\rho \mathbf{b}$ não varia)	0
Termo II: a variação temporal da grandeza $\mathbf{B}$ assoc. à deformação do V_c	- 10
Termo III: o fluxo (convectivo) da grandeza $\mathbf{B}$ através da superfície de controlo	+ 10

Princípio de Conservação de Massa

- Princípio: $\frac{Dm}{Dt} = 0$ ou $\frac{D}{Dt} \int_{\forall_s} \rho b d\forall = 0$ sendo m = massa do sistema material

- Aplicando o Teorema de Transporte de Reynolds ($\mathbf{B} = m$, $b = 1$ e $\mathbf{F}_B = 0$),

- Vc genérico

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{Forma 1})$$

$$\int_{\forall_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{S_c} \rho (\vec{u}_s | \vec{n}) dS + \int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{Forma 2})$$

$$\int_{\forall_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{S_c} \rho (\vec{u} | \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{Forma 3})$$

- Vc fixo e indeformável

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \int_{S_c} \rho (\vec{u} | \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{Forma 4})$$

Princípio de Conservação de Massa

- Significado físico das parcelas

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV}_{I+II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = 0 \quad (\text{Forma 1})$$

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_s | \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\vec{u}_r | \vec{n}) dS}_{III} = 0 \quad (\text{Forma 2})$$

- Termo I: variação temporal da massa volúmica dentro do Vc
- Termo II: variação temporal da massa associada ao deslocamento/deformação do Vc
 - Termo I+II: variação temporal da massa no volume de controlo
- Termo III: fluxo da massa através da superfície de controlo

Princípio de Conservação de Massa

- Escoamentos permanentes ($\partial / \partial t = 0$)

$$\int_{\nabla} \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} dV + \int_{S_c} \rho (\vec{u} | \vec{n}) dS = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \int_{S_c} \rho (\vec{u} | \vec{n}) dS = 0$$

- Se as superfícies de controlo permeáveis tiverem distribuições uniformes de velocidade e de massa volúmica

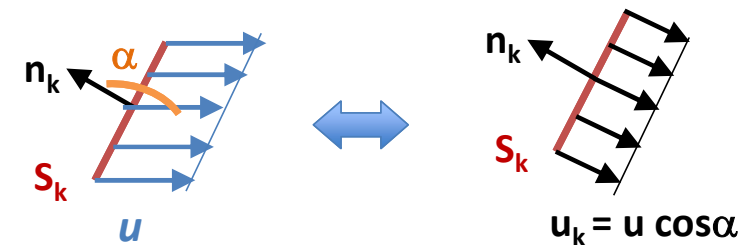
$$\int_{S_0} \rho (\vec{u} | \vec{n}) dS = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \sum_k (\pm) \rho_k u_k S_k = 0$$

sendo ρ_k = massa volúmica na secção k

u_k = projeção da velocidade na direção n_k

S_k = área da secção k

(nota: + nas saídas e – nas entradas)



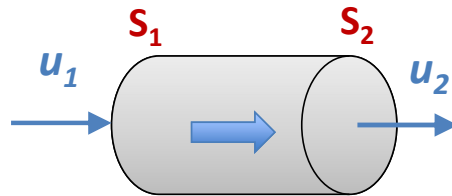
Princípio de Conservação de Massa

- Escoamentos permanentes ($\partial / \partial t = 0$)

- Para fluido único ($\rho_k = \rho$ em todo V_c)

$$\sum_k (\pm) \cancel{\rho_k} u_k S_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_k (\pm) u_k S_k = 0$$

- Exemplo 1: conduta com água (escoamento permanente)

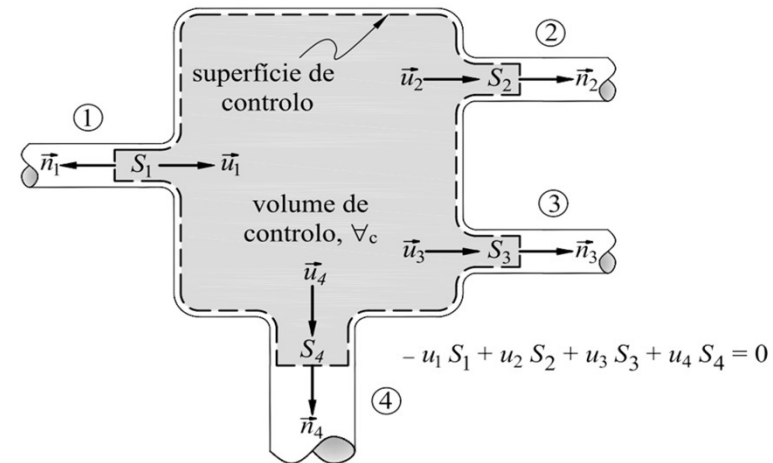


$$-u_1 S_1 + u_2 S_2 = 0$$

$$u_1 S_1 = u_2 S_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

- Exemplo 2: sistema com várias entradas/saídas com fluido único e incompressível (esc. permanente)



Problema 4.1

Com base no princípio da conservação da massa e tendo em conta o Teorema de Transporte de Reynolds e a técnica do volume de controlo, determine:

- a velocidade u_1 da superfície livre de um reservatório de secção constante, considerando como volume de controlo o volume inicial de água e mantendo-o fixo no tempo (Figura 4.29a);
- a lei da variação da área da superfície livre $S_1(h)$ do reservatório de modo a que a velocidade u_1 seja constante no tempo (Figura 4.29b);

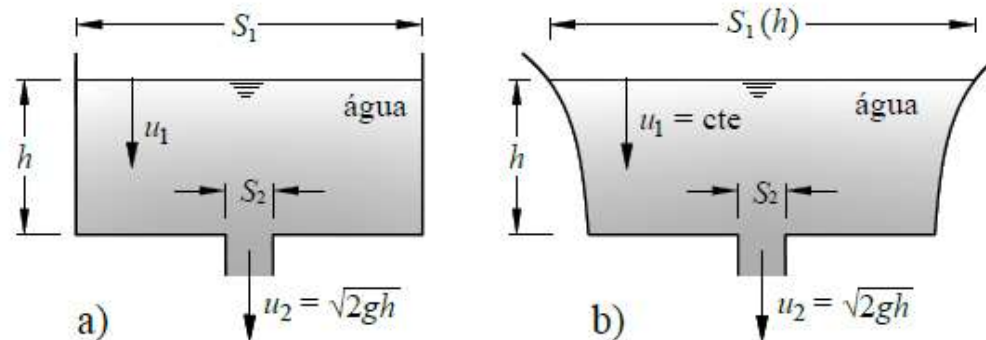


Figura 4.29

Estudo autónomo

- Estudar
 - Secções 4.2 a 4.5
 - Exemplos 4.2, 4.3 e 4.4

- Resolver