

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Hidrocinemática

Conteúdo da Aula

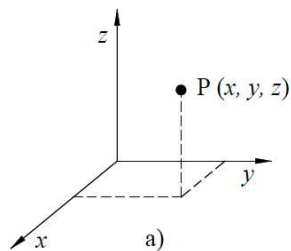
- Notação e conceitos preliminares
- Descrições euleriana e lagrangiana do movimento
- Vetor velocidade e derivada material
- Vetor aceleração
 - Exemplo 3.4
- Linhas de escoamento
 - Trajetória
 - Linha de corrente
 - Linha de filamento
 - Filme

Hidrocinemática (origem etimológica da palavra)

- Hidrocinemática = Hidro (água) + Cinemática (movimento)
 - água (*hidro*)** por ter sido o primeiro fluido considerado neste ramo da Física; fluidos na generalidade
 - Cinemática** é o ramo da Física que estuda o movimento de corpos, sem atender às forças/massas
- Objetivo
 - O estudo do movimento dos fluidos sem atender às causas que o originam ou mantêm.
 - *Os conceitos têm sido aplicados no desenvolvimento de técnicas de medição (PIV, LDV) e de visualização e interpretação de escoamentos*
- Grandezas cinemáticas
 - São grandezas compostas por **espaço** e **tempo**, ou apenas **tempo** (não envolvem massa).
 - São exemplos a **velocidade**, a **aceleração**, a **frequência**, ...

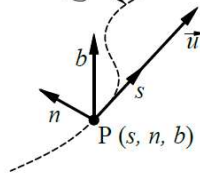
Notação

- Uma **grandeza física** associada ao escoamento é genericamente designada por **A**
 - se **escalar**, pode também usar-se **A**;
 - se **vetor**, usa-se $\vec{A}$;
 - se **matriz**, recorre-se à notação **tensorial indicial**, em que o número de índices identifica a ordem do tensor, A_{ij} ;
recorre-se, por vezes, à convenção de Einstein para definir somatórios.
- Sistemas de coordenadas

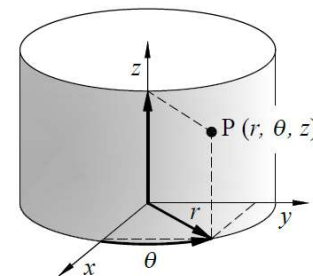


cartesianas

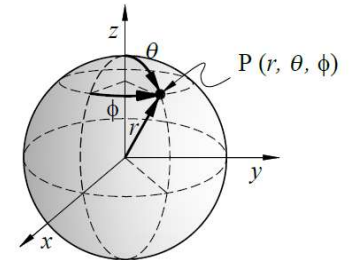
linha de corrente
que passa no ponto P



intrínsecas



cilíndricas



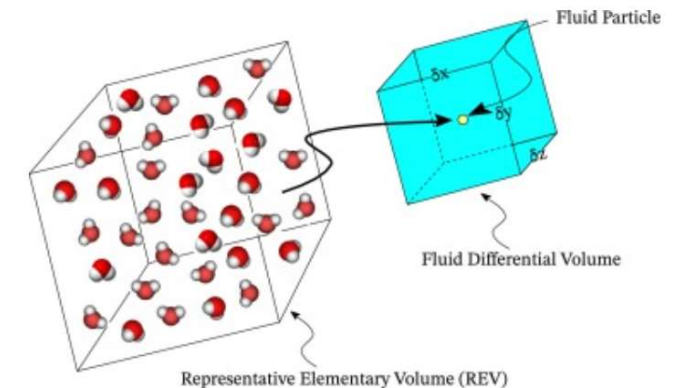
esféricas

- Na Hidráulica:
 - **Coordenadas cartesianas** (x, y, z) e coordenadas **intrínsecas** (s, n, b)
 - Notação tensorial: x_1 , x_2 e x_3

Conceitos

■ Partícula

- a porção mínima de fluido que contém um número suficientemente grande de moléculas para que as propriedades do fluido sejam independentes da porção de fluido (exemplo, $\forall_{\min}$ de uma partícula de água é 10^{-9} mm^3)

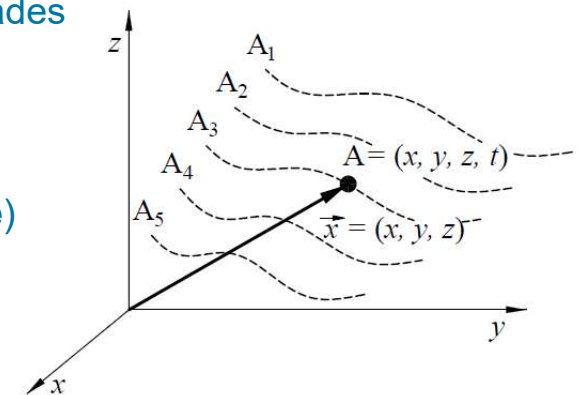


■ Admite-se que o fluido se comporta como **meio contínuo**

- para cada ponto do espaço, podem-se especificar os valores de propriedades da partícula de fluido

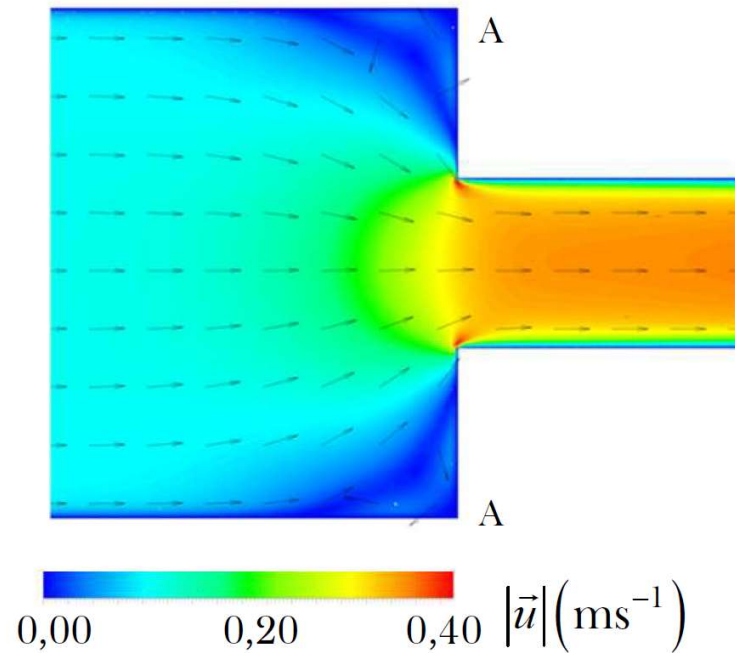
■ Variáveis ou propriedades de campo

- propriedades da partícula (**massa volúmica, temperatura ou velocidade**)
- descritas por funções contínuas das coordenadas dos pontos (funções de campo)

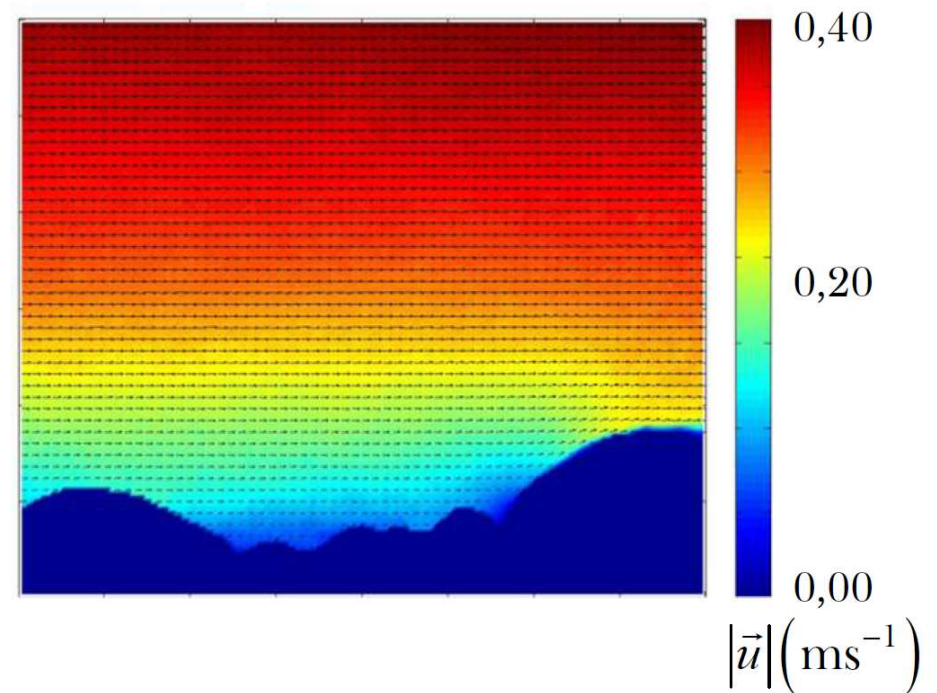


Conceitos

- Exemplos de **campos de velocidades**



escoamento no interior de uma conduta num
trecho com um estreitamento brusco



escoamento com uma fronteira irregular

Descrições do escoamento

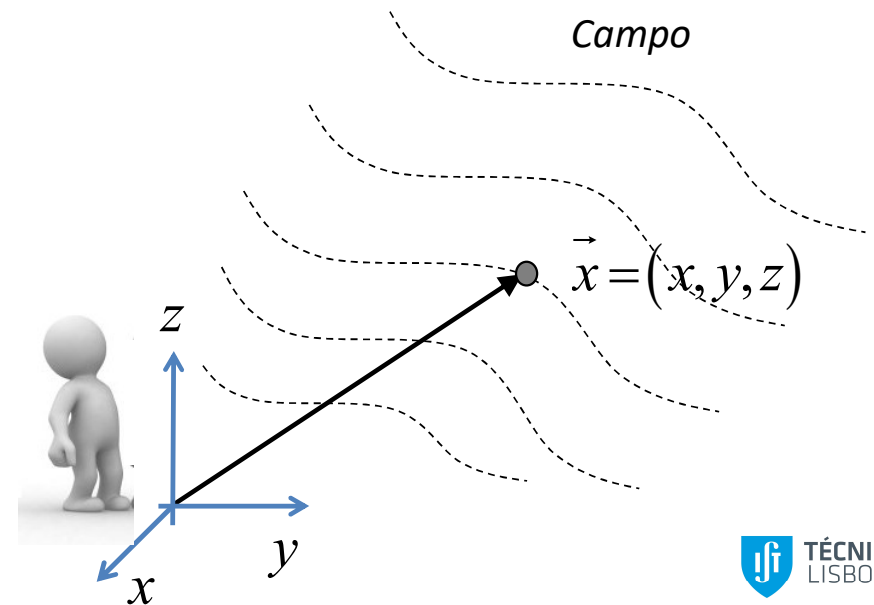
Descrição euleriana

- Descrição **espacial** ou **euleriana**

- descrição do escoamento com base nas variáveis de campo, observadas ao longo do tempo, num conjunto de **posições fixas** do espaço.
- corresponde à descrição por um **observador solidário com o referencial** (x,y,z).
- usada na **maioria das situações práticas** de Hidráulica no estudo de líquidos.

- As variáveis de campo variam no espaço e no tempo

- Vetor posição $\vec{x} = (x, y, z)$
- Vetor velocidade $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$
- Variável genérica $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\vec{x}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t)$



Descrições do escoamento

Descrição lagrangiana

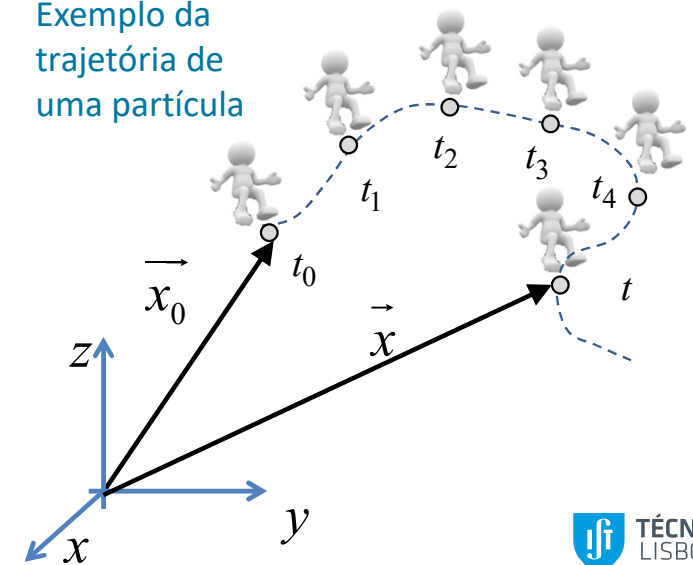
- Descrição **lagrangiana**, **material** ou **substancial**

- descrição do movimento seguindo um conjunto de partículas de fluido ao longo do tempo.
- corresponde à descrição do escoamento por um **observador solidário com a partícula**
- permite estudar o movimento de uma partícula, ou de um conjunto de partículas, e é a abordagem utilizada para a descrição do movimento de corpos rígidos.

- As variáveis de campo dependem do vetor posição inicial de cada partícula no instante t_0 (identificador da partícula) e do tempo

- Vetor posição inicial** $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$
- Vetor posição** $\vec{x} = (x_0, y_0, z_0, t) \equiv (\vec{x}_0, t)$
- Vetor velocidade** $\vec{u} = \vec{u}(x_0, y_0, z_0, t) \equiv \vec{u}(\vec{x}_0, t)$
- Variável genérica** $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_0, y_0, z_0, t) = \mathbf{A}(\vec{x}_0, t)$

Exemplo da trajetória de uma partícula



Vetor velocidade

- O **vetor velocidade** é definido como a taxa temporal do vetor posição:

$$\vec{u}(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{ou, em notação tensorial,} \quad u_j = \frac{dx_j}{dt}$$

- Esta derivada temporal corresponde à derivada material, derivada substancial ou derivada total e está associada à variação da posição de uma partícula por unidade de tempo.
- Em coordenadas cartesianas, o campo de velocidade é definido por

$$\vec{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

- em que u , v , w representam as componentes do campo de velocidades nas direções coordenadas x , y e z , respetivamente, e $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são os versores nas mesmas três direções.

Derivada material

- Derivada material de uma grandeza genérica $\mathbf{A}$

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

em notação vetorial

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{u} | \vec{\nabla}) \mathbf{A}$$

operador diferencial vetorial

em notação tensorial

$$\frac{DA_j}{Dt} = \frac{\partial A_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

Nota:

Uso de “D” em vez de “d” para reforçar a ideia de que se trata da derivada material

sendo

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt}$$

derivada material – descreve a variação temporal global da grandeza $\mathbf{A}$ associada a cada partícula, tal como é descrita por um observador solidário com essa partícula (abordagem lagrangiana).

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

derivada local – corresponde à derivada parcial da grandeza $\mathbf{A}$ em ordem ao tempo mantendo-se sem alteração a localização do ponto do espaço; representa a variação de $\mathbf{A}$ na descrição euleriana.

$$(\vec{u} | \vec{\nabla}) \mathbf{A}$$

derivada convectiva – representa a taxa temporal da grandeza $\mathbf{A}$ que resulta, exclusivamente, do transporte da variação espacial da referida grandeza pelo vetor velocidade, $\mathbf{u}$, considerando a variável t constante.

Vetor aceleração

- O **vetor aceleração** de uma partícula de fluido caracterizada pelo vetor posição inicial $\mathbf{x}_0$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

- Em notação vetorial ou em notação tensorial

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\left(\vec{u} \cdot \nabla\right) \vec{u}}_2$$

1 *aceleração local:*
representa a variação temporal da velocidade avaliada numa dada posição fixa do espaço.

$$a_j = \frac{Du_j}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_1 + \underbrace{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_2$$

2 *aceleração convectiva::*
representa a componente da variação temporal da velocidade que resulta, exclusivamente, do transporte da variação espacial de $\mathbf{u}$ pelo próprio vetor velocidade.

Vetor aceleração

- O **vetor aceleração** é definido por:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

notação vetorial

$$a_j = \frac{Du_j}{Dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

notação tensorial

- Atendendo às componentes do vetor velocidade $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, tem-se:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

- sendo as respetivas componentes :
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Exemplo 3.4

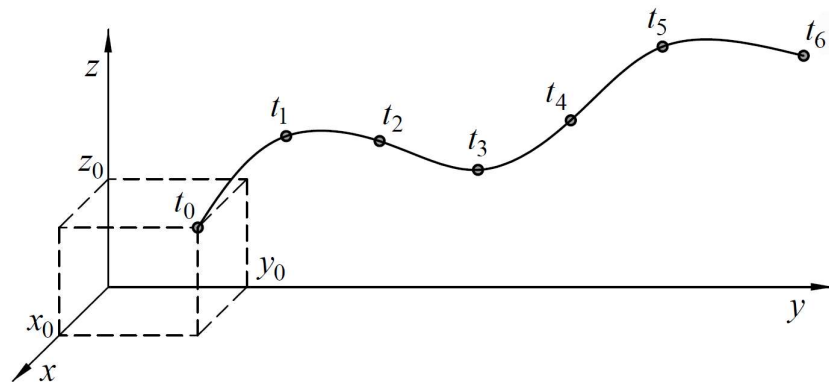
Considere o seguinte campo de velocidade (ms^{-1}):

$$\vec{u} = 10x^2 \vec{i} - 20xy \vec{j} + 100t \vec{k}$$

Calcule o vetor aceleração da partícula que passa no ponto $(1, 2, 5)$ no instante $t = 0,1$ s.

Linhas de escoamento: trajetória

- A **trajetória** de uma partícula é a linha definida pelas sucessivas posições ocupadas pela partícula ao longo do tempo.
- Corresponde ao **percurso** dessa partícula no tempo



- Cada **trajetória** está associada a **uma partícula específica**, aquela que passa num ponto de coordenadas espaciais (x_0, y_0, z_0) num instante $t = t_0$.
 - Por isso, é usual associar-se o **traçado de trajetórias** à **descrição lagrangiana** do escoamento.

Linhas de escoamento: trajetória

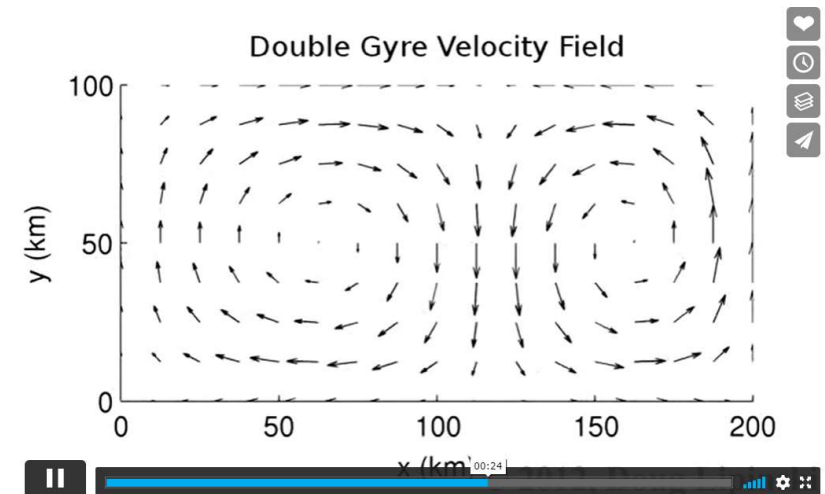
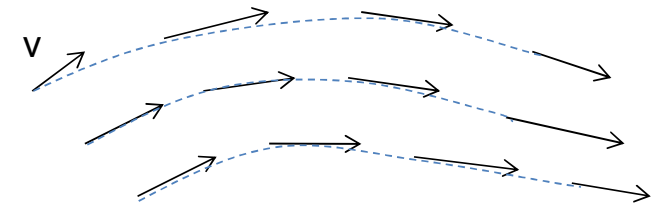
- As trajetórias são definidas pelas seguintes equações diferenciais ordinárias (em que $d/dt \equiv D/Dt$)

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t); \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t); \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

- As equações das trajetórias são obtidas por integração das equações anteriores no espaço e no tempo, tendo em conta que uma determinada partícula (para a qual se determina a trajetória) ocupa a posição $\mathbf{x}_0$ no instante $t = t_0$
- A solução das equações permite obter as equações paramétricas da trajetória definidas em função do tempo t
$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$
- Eliminando a variável tempo das equações paramétricas, obtêm-se as equações da trajetória (função apenas das coordenadas espaciais)
 - Para escoamentos bidimensionais, corresponde a uma equação única
 - Para escoamentos tridimensionais, correspondem a duas equações

Linha de corrente

- A **linha de corrente** é uma linha tangente, em cada um dos seus pontos, ao vetor velocidade do escoamento.
 - Como o campo de velocidades pode variar no tempo, as linhas de corrente também podem variar e definem-se, por isso, em cada instante.
- A **família de linhas de corrente** de um dado escoamento caracteriza-o num dado instante, definindo um padrão de escoamento.

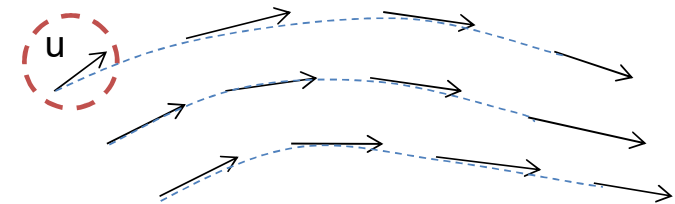


Linha de corrente

- A equação matemática que traduz a condição de tangência entre o vetor de velocidade num ponto e a linha de corrente nesse mesmo ponto é:

$$\vec{u} \times d\vec{s} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

sendo ds (dx, dy, dz) o vetor elementar de percurso ao longo da linha de corrente



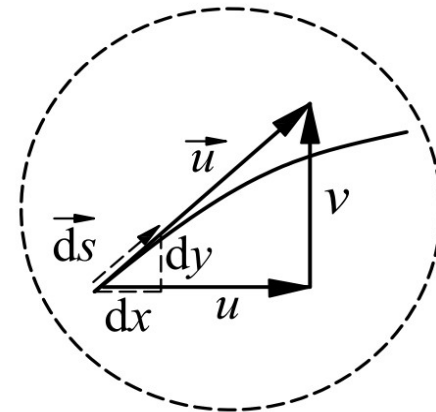
- ou seja

$$(vdz - wdy)\vec{i} + (wdx - udz)\vec{j} + (udy - vdx)\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} vdz - wdy = 0 \\ wdx - udz = 0 \\ udy - vdx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} & \text{no plano } yz \\ \frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} & \text{no plano } xz \\ \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} & \text{no plano } xy \end{cases}$$

Equações diferenciais das linhas de corrente
(equações diferenciais ordinárias)

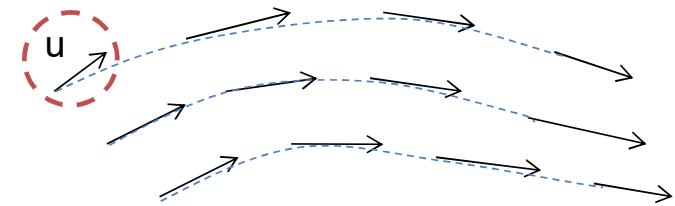


pormenor A

Linha de corrente

- Equações diferenciais das linhas de corrente (equações diferenciais ordinárias)

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$



- sujeitas a condições de fronteira definidas por $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$ no instante $t = t_0$
- Por integração no espaço entre um determinado ponto $\mathbf{x}_0$ e um ponto genérico $\mathbf{x}$, obtém-se a linha de corrente que passa em (x_0, y_0, z_0) em $t = t_0$

- Para escoamentos bidimensionais (em x, y), corresponde a uma equação única $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

- Para escoamentos tridimensionais, correspondem a duas equações

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

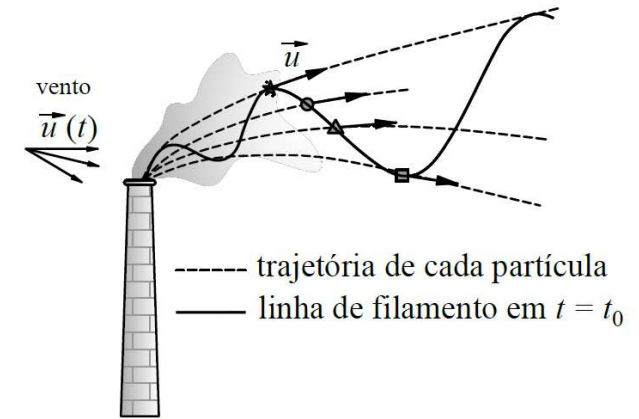
Linha de filamento

- A **linha de filamento, de rasto ou de fumaça** representa o lugar geométrico das partículas que, num determinado instante, t_0 , já passaram (ou vão passar) por uma dada posição no espaço, $\mathbf{x}_0$

- A linha de filamento é constituída pela posição do conjunto de partículas que passaram (ou ...) em $\mathbf{x}_0$ no intervalo $t < t_0$



- A sua equação de definição é obtida pela integração da **equação das trajetórias** sujeita à condição inicial $\mathbf{x}_0$ no instante t .
- Ou seja, os limites de integração especificam-se por forma a fazer corresponder a posição inicial $\mathbf{x}_0$ ao instante t e a posição final $\mathbf{x}$ ao instante t_0
 - *A restante resolução é idêntica à do cálculo das trajetórias*



Estudo autónomo

■ Estudar

- Secções 3.1-3.5, 3.6.1-3.6.2 (trajetória), 3.6.3 (linha de corrente), 3.6.4 (linha de filamento)
- Exemplo 3.4 (vetor aceleração),
- Exemplos 3.6 (trajetória), 3.8 (linha de corrente), 3.9 (linha de filamento), 3.10 (campo bidimensional), 3.11 (campo tridimensional), 3.12 (l.c.+trajetórias)

■ Resolver

- Problemas 3.1b), 3.6a) (vetor aceleração)
- Todos os problemas do capítulo 3 relativos a linhas de escoamento