

# HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Hidrostática

# Conteúdo da Aula

---

- Breve revisão da aula anterior
- Princípio de Arquimedes
- Impulsão sobre superfícies curvas
  - Problema 2.6
  - Problema 2.9

# Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

Breve revisão

- A pressão em cada ponto é:

$$p = \gamma h = \gamma (y \sin \theta)$$

- A impulsão  $\Pi$ :

$$\Pi = \int_S p \, dS \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int_S \gamma (y \sin \theta) \, dS$$

fluido homogéneo e incompressível

$$\Rightarrow \quad \Pi = \gamma \sin \theta \int_S y \, dS$$

- Atendendo a que a coordenada  $y_0$  do centroide da superfície obedece à condição

$$y_0 = \frac{\int_S y \, dS}{S}$$

- vem

$$\Pi = \gamma \sin \theta y_0 S = \gamma (y_0 \sin \theta) S$$

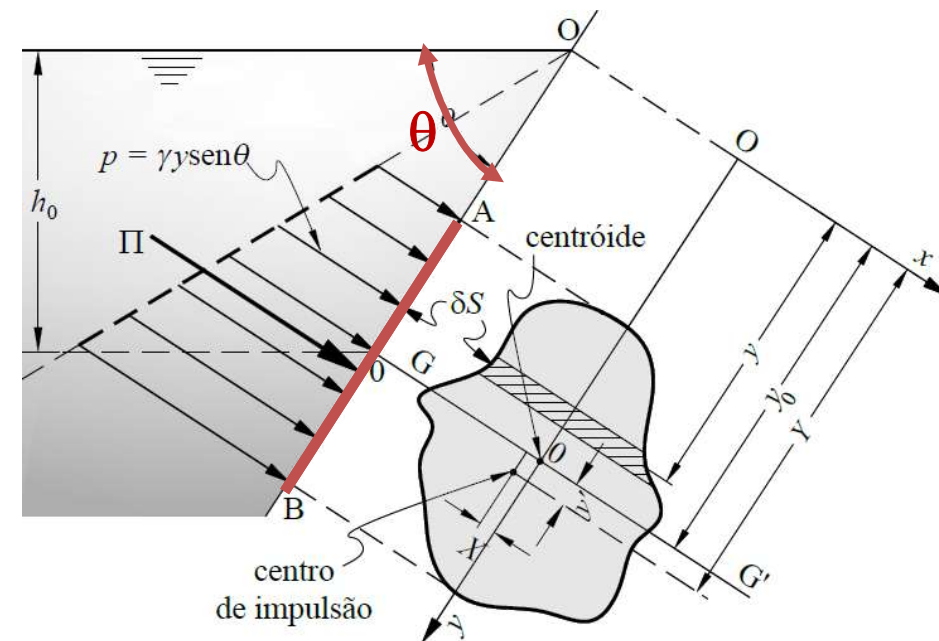
$$\Pi = \gamma h_0 S$$

sendo  $\gamma$ , o peso volúmico do fluido,  $h_0$ , a profundidade no centroide da superfície e  $S$ , a área da superfície

ou

$$\Pi = p_0 S$$

sendo  $p_0$ , a pressão no centroide da superfície e  $S$ , a área da superfície.



# Impulsão sobre superfícies planas **não horizontais**

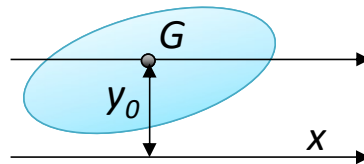
Breve revisão

- Continuando...

$$Y = \frac{I_x}{y_0 S}$$

- De acordo com o teorema de **Lagrange-Steiner**, o momento de inércia  $I_x$  relaciona-se com o **momento de inércia da superfície plana em relação ao eixo  $GG'$**  que passa pelo centroide e é paralelo ao eixo  $Ox$ ,  $I_G$ :

$$I_x = I_G + S y_0^2$$



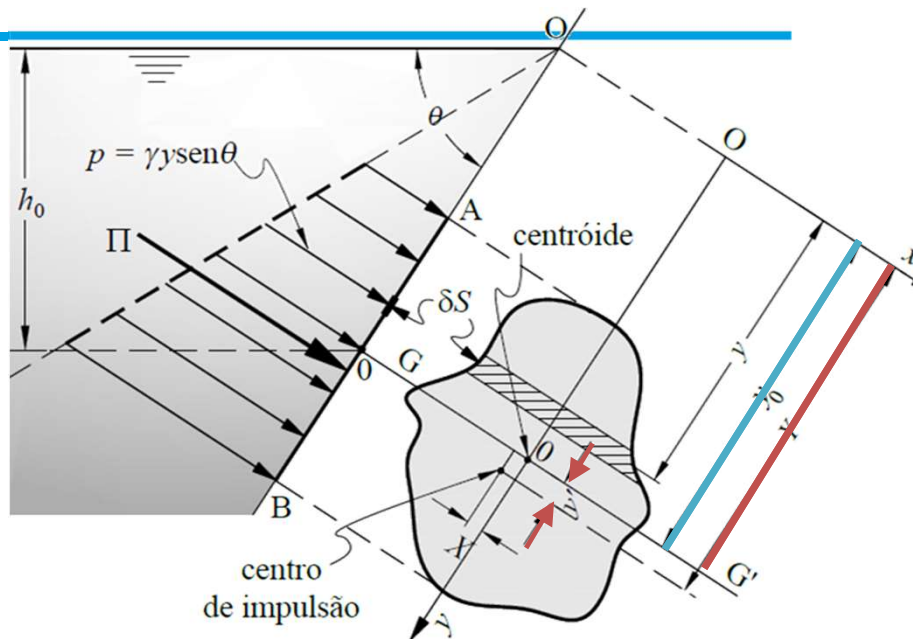
- donde

$$Y = \frac{I_G + S y_0^2}{S y_0}$$

$$\therefore Y = y_0 + \frac{I_G}{S y_0}$$

$$\therefore y' = \frac{I_G}{S y_0}$$

Distância entre o centro de impulsão e o centroide (o centro de impulsão situa-se abaixo do centroide)

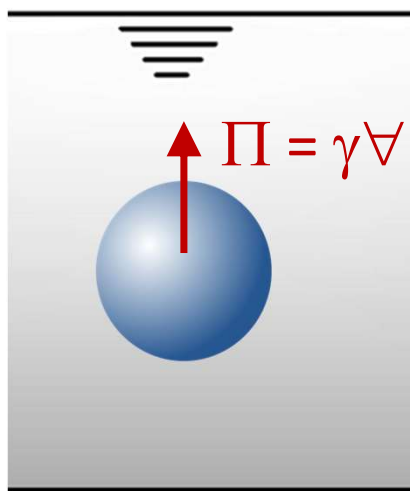


sendo  $I_G$ , o momento de inércia da superfície plana em relação a um eixo perpendicular à reta de maior declive do plano que passa no centroide da superfície plana

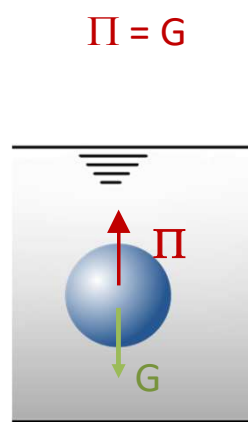
# Princípio de Arquimedes

- O **princípio de Arquimedes** estabelece que um corpo imóvel completamente mergulhado num fluido homogéneo recebe deste uma impulsão vertical, de baixo para cima, igual ao peso do volume de fluido deslocado.

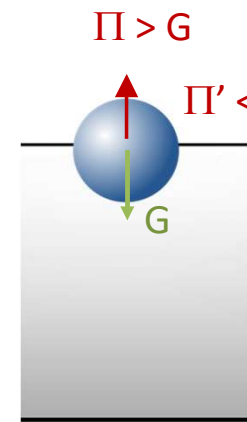
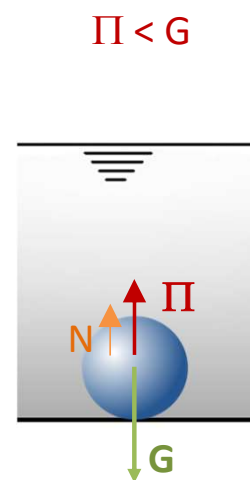
Três situações de equilíbrio



$\Pi = \gamma \nabla$   
sendo  $\gamma$  o peso volúmico do  
fluido e  $\nabla$  o volume do corpo



$G = \gamma_c \nabla$   
sendo  $\gamma_c$  o peso volúmico do corpo



$\Pi' = \gamma \nabla'$   
sendo  $\nabla'$  o volume imerso do corpo

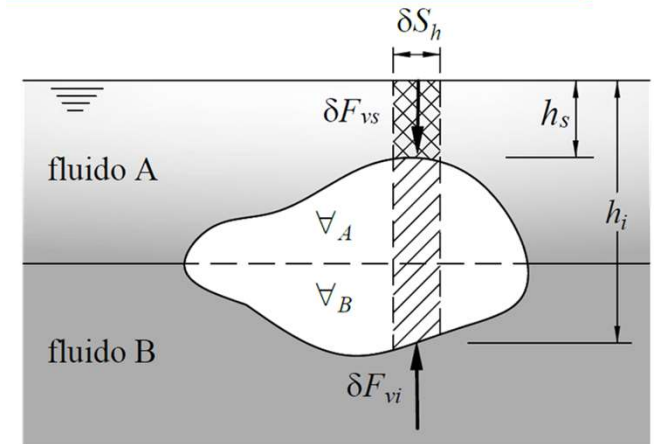
# Princípio de Arquimedes

## *Impulsão sobre um corpo mergulhado na interface de dois líquidos*

- Considere-se um corpo mergulhado na interface de dois líquidos homogêneos, A e B.
- O **módulo da impulsão vertical** sobre o corpo é a soma dos pesos dos volumes dos líquidos deslocados
  - *demonstra-se por um raciocínio similar ao dos corpos mergulhados num único líquido:*

$$\Pi_v = \gamma_A \nabla_A + \gamma_B \nabla_B$$

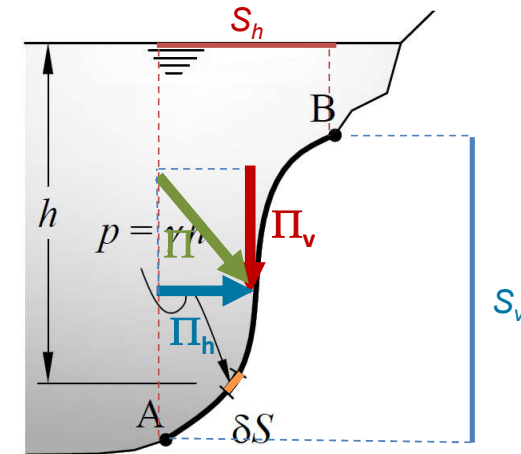
- O **ponto de aplicação** da impulsão vertical é o centro de gravidade de um corpo não homogêneo com pesos volúnicos diferentes.
- No caso de o **corpo se encontrar na interface entre o ar e a água**, sendo desprezável o peso volúmico do ar, o centro de impulsão coincide com o centroide do volume de água deslocado (volume submerso).
- A **impulsão horizontal** sobre os corpos mergulhados na interface de dois líquidos **também é nula**.



# Impulsão sobre superfícies curvas

## Componentes horizontal e vertical

- Para determinar o módulo e a linha de ação da **impulsão** sobre uma **superfície curva** é conveniente calcular primeiro as respetivas componentes **vertical** e **horizontal** e adicioná-las vectorialmente.
- Considere-se a superfície AB que verifica a **condição de bijeção** com as respetivas projeções vertical,  $S_v$ , e horizontal,  $S_h$



Analise-se a superfície elementar de área  $dS$

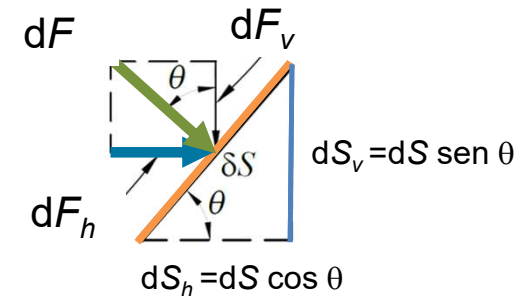
- Esta superfície é atuada pela uma **força de pressão**:

$$dF = p dS = \gamma h dS$$

- A **componente horizontal desta força** é:

$$dF_h = (\gamma h dS) \sin \theta = \gamma h dS_v$$

em que  $dS_v = dS \sin \theta$  é a **área da projeção da superfície  $dS$  no plano vertical**.



# Impulsão sobre superfícies curvas

## Componente horizontal

- O módulo da componente horizontal da impulsão é o integral de  $dF_h$  na totalidade da superfície AB

$$\Pi_h = \int_S dF_h \quad \xrightarrow{dF_h = \gamma h dS_v} \quad \Pi_h = \int_S \gamma h dS_v \quad \xrightarrow{\gamma \text{ constante}} \quad \Pi_h = \gamma \int_S h dS_v$$

$$\xrightarrow{\quad} \quad \Pi_h = \gamma h_0 S_v$$

sendo  $h_0$  é a distância entre a superfície livre e o centroide da superfície plana vertical projetada e  $S_v$  é a respetiva área.

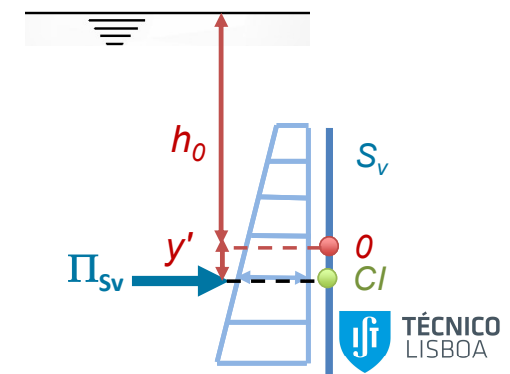
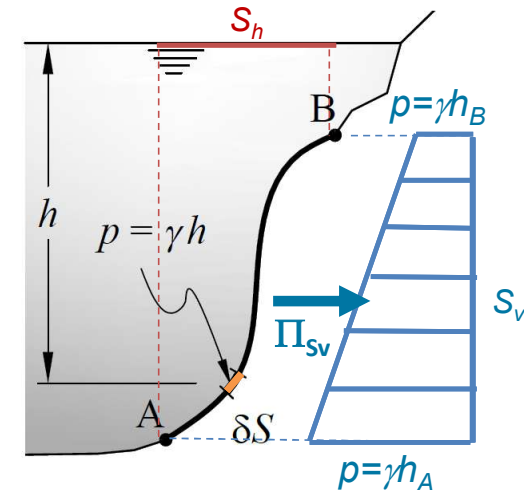
- Esta equação mostra que **componente horizontal da impulsão** numa superfície curva é igual:

- à impulsão na superfície vertical projetada  $S_v$ :  $\Pi_h = \Pi_{S_v}$
- ou seja, ao produto da pressão no centroide da superfície projetada pela respetiva área:  $\Pi_h = p_0 S_v$

- Sendo  $S_v$  a área da superfície projetada plana, **a linha de ação** da componente horizontal da impulsão pode ser obtida por

$$y' = \frac{I_G}{S y_0}$$

- substituindo  $S$  por  $S_v$  e  $y_0$  por  $h_0$ .



# Impulsão sobre superfícies curvas

## Componente vertical

- O módulo da **componente vertical da força** elementar de pressão é:

$$dF_v = (\gamma h dS) \cos \theta = \gamma h dS_h$$

- sendo  $dS_h = dS \cos \theta$  a **área da secção transversal** do prisma de líquido situado acima da superfície elementar de área  $\delta S$

- Como o **volume do prisma elementar** é  $d\forall = h dS_h$ , tem-se

$$dF_v = \gamma \boxed{h dS_h} \Rightarrow dF_v = \gamma d\forall$$

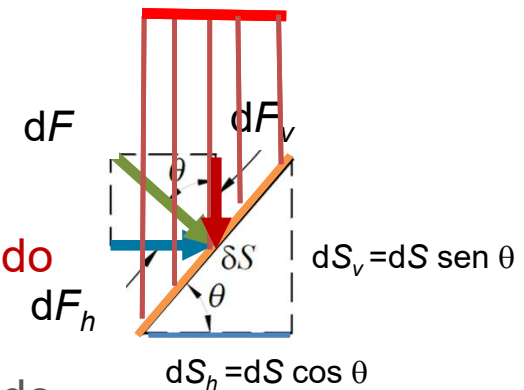
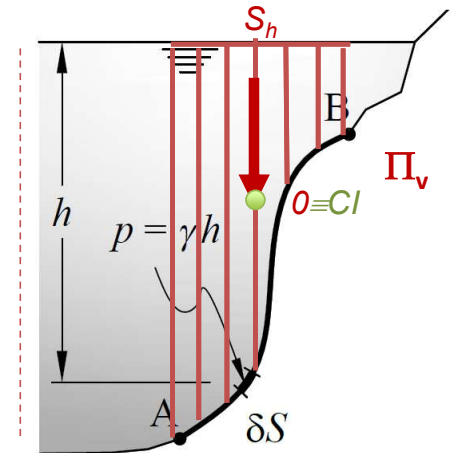
- O módulo da **componente vertical da impulsão** é dado por:

$$\Pi_v = \int_{\forall} \gamma d\forall = \gamma \forall$$

em que  $\forall$  é o volume de líquido situado por cima da superfície curva

- O **valor** da componente vertical da impulsão **é igual** ao **peso do líquido** situado verticalmente entre a superfície livre e a superfície AB.

- A **sua linha de ação** passa pelo centroide do referido volume de líquido (se líquido único) ou no centro de gravidade do volume (se vários líquidos).

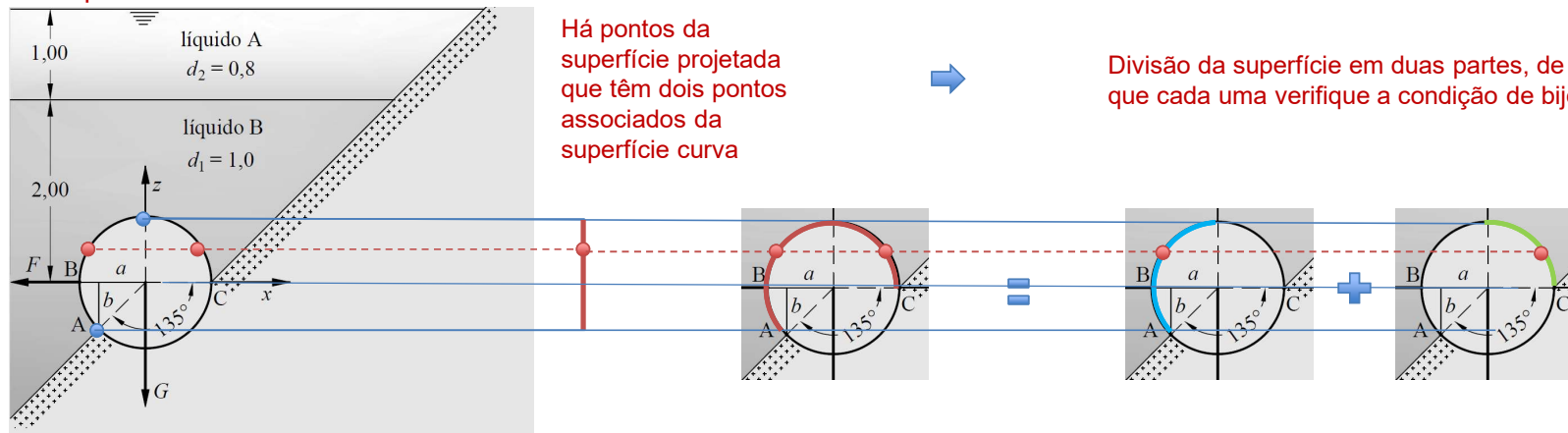


# Impulsão sobre superfícies curvas

## *Componentes horizontal e vertical*

- Sempre que **não se verifique a condição de bijeção** entre uma **superfície curva** e as **respetivas projeções**, a superfície curva deve ser decomposta em trechos que verifiquem aquela condição, nos quais se aplicam os resultados aqui obtidos.

Exemplo 2.11



- A impulsão sobre a superfície resulta da soma vetorial das impulsões parcelares

## Problema 2.6

---

Na parede de um reservatório que contém água, existe um visor semiesférico com a configuração indicada na Figura 2.43. Calcule os módulos das componentes horizontal e vertical da impulsão no visor.

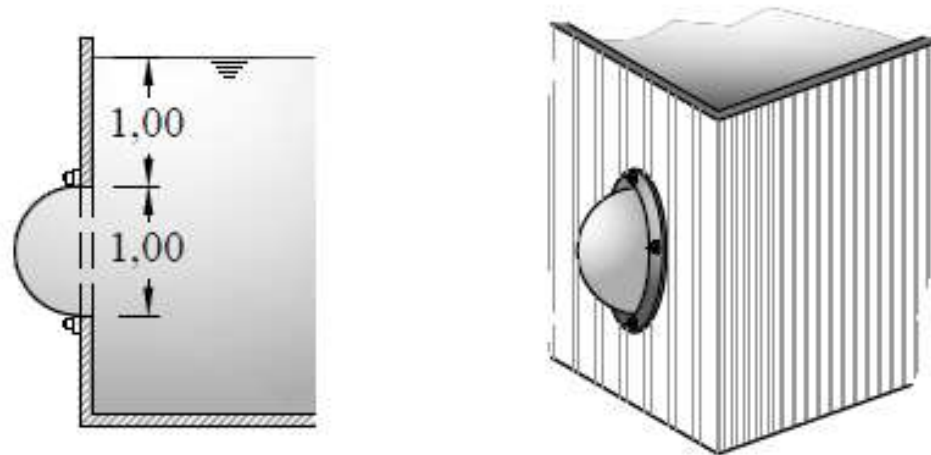


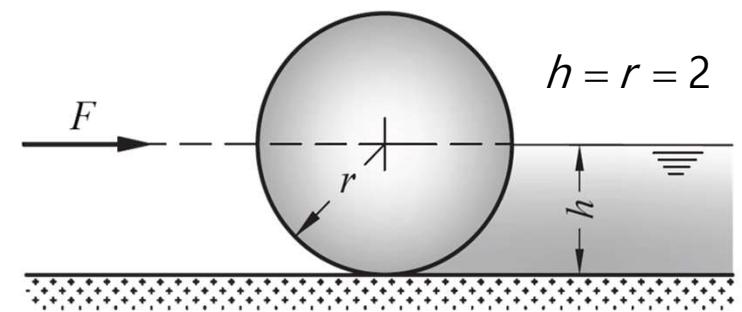
Figura 2.43

## Problema 2.9

### Enunciado

O cilindro retém uma massa de água parada com altura  $h = r = 2$  m.

- (a) Calcule a força,  $F$ , por unidade de comprimento a aplicar no eixo do cilindro para que este não se desloque horizontalmente por rolamento.
- (b) Calcule a densidade mínima do cilindro para que este não se desloque verticalmente.



# Estudo autónomo

---

- Estudar

- Secções 2.9 e 2.10
- Exemplos 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13

- Resolver

- Problemas 2.6\*, 2.7\*, 2.8, 2.9\*, 2.10

*\* problemas resolvidos nas aulas*