

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Hidrostática – Impulsão hidrostática

Conteúdo da matéria

- Síntese da aula anterior
- Impulsão hidrostática (ou impulsão)
- Impulsão sobre superfícies planas horizontais
- Impulsão sobre superfícies planas não horizontais
 - Exemplo 2.7 (parede vertical, dois fluidos)
 - Problema 2.4 (tampa quadrada, um fluido)
 - Exemplo 2.8 (tampa quadrada, dois fluidos)

Aula anterior: Equação fundamental da Hidrostática

- Esta equação permite calcular a diferença de pressão entre quaisquer dois pontos de um fluido em dois planos horizontais distintos, afastados da distância vertical h .
 - **Para fluidos incompressíveis** ($\rho = \text{cte}$), como os líquidos para pequenas diferenças de cotas

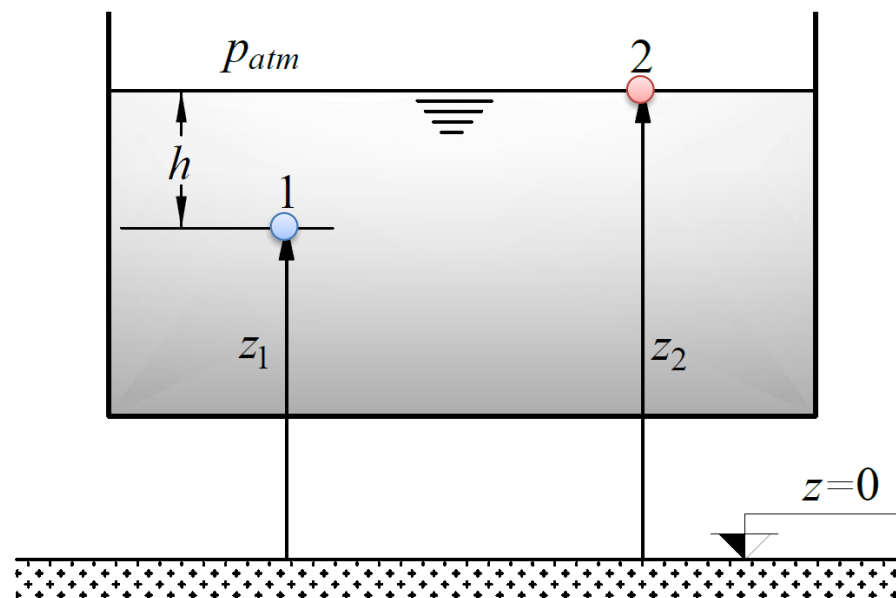
$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

ou

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{cte}$$

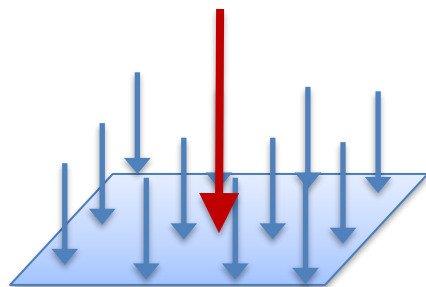
ou

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = 0$$

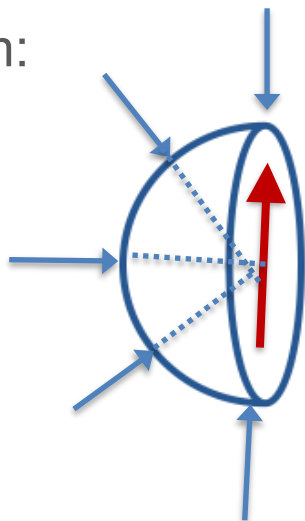


Impulsão hidrostática (ou impulsão)

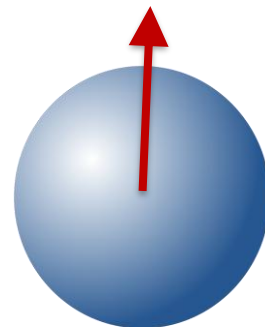
- No caso geral, um conjunto de forças de pressão hidrostática distribuídas sobre uma superfície pode ser substituído por um **sistema equivalente** constituído por **uma força** e um **momento (ou binário)**.
- Quando este sistema equivalente pode ser reduzido a uma força única e é possível eliminar o binário, esta força denomina-se por **impulsão hidrostática** ou, simplesmente, **impulsão, Π** .
- Isto só acontece em:



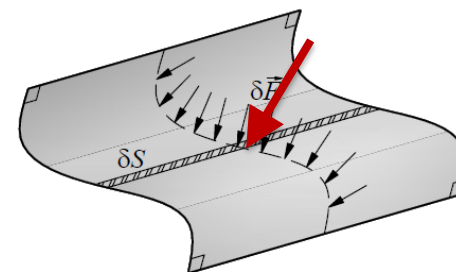
superfícies planas
(sistemas de forças
paralelas)



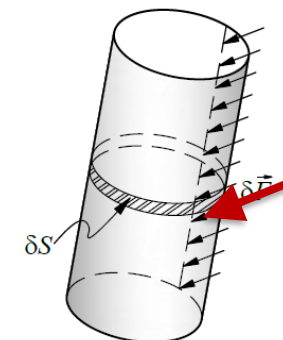
calotes esféricas
(sistemas de forças
concorrentes)



corpos imersos ou flutuantes
(forças com resultante
vertical pelo princípio de
Arquimedes)



superfícies cilíndricas delimitadas por
secções planas, normais às geratrizes,
mergulhadas
num único fluido



Impulsão sobre superfícies planas **horizontais**

- Tem uma distribuição de pressões uniforme p em toda a área de contacto com o fluido S

- Módulo a força de pressão:

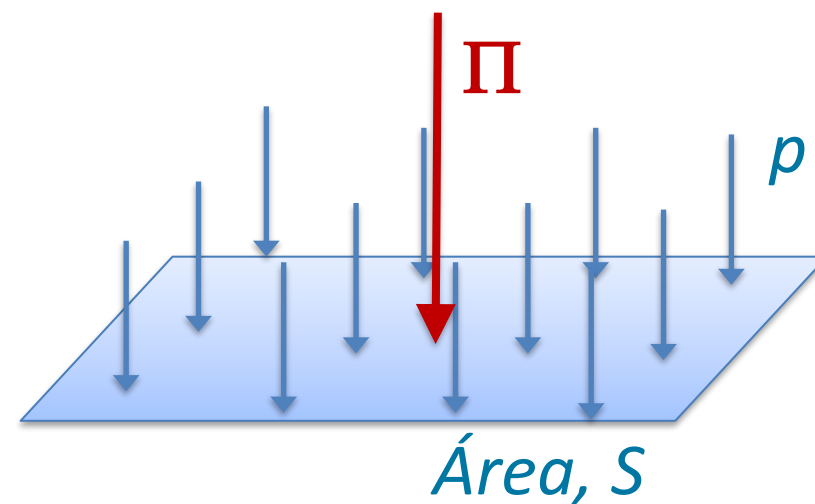
$$\Pi = pS$$

- Direção e sentido da força de pressão:

- normal ao plano, do exterior para o plano.

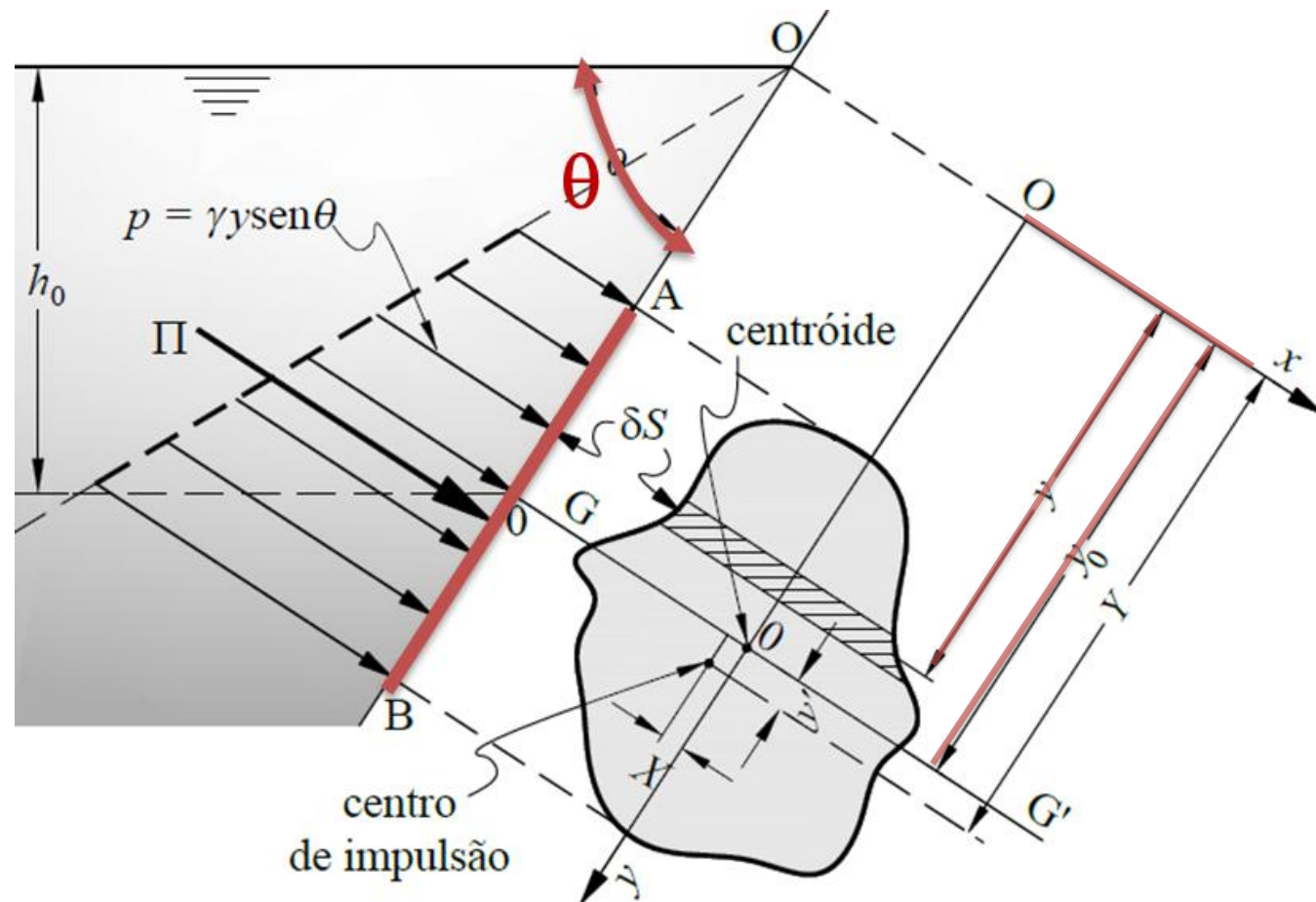
- Ponto de aplicação

- No centroide (centro geométrico) da superfície plana.



Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

- a superfície plana de **traço AB** submersa num líquido.
- o plano que contém a superfície AB interseeta o plano da superfície livre do líquido no **eixo Ox**;
- estes planos fazem, entre si, um ângulo θ .
- a distância do **centroide** da superfície AB ao eixo Ox é y_0 .
- a distância da **superfície elementar** de área δS a Ox é y



Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

- A pressão em cada ponto é:

$$p = \gamma h = \gamma (y \sin \theta)$$

- A impulsão Π :

$$\Pi = \int_S p \, dS \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int_S \gamma (y \sin \theta) \, dS$$

fluido homogéneo e incompressível

$$\Rightarrow \quad \Pi = \gamma \sin \theta \int_S y \, dS$$

- Atendendo a que a coordenada y_0 do centroide da superfície obedece à condição

$$y_0 = \frac{\int_S y \, dS}{S}$$

- vem

$$\Pi = \gamma \sin \theta y_0 S = \gamma (y_0 \sin \theta) S$$

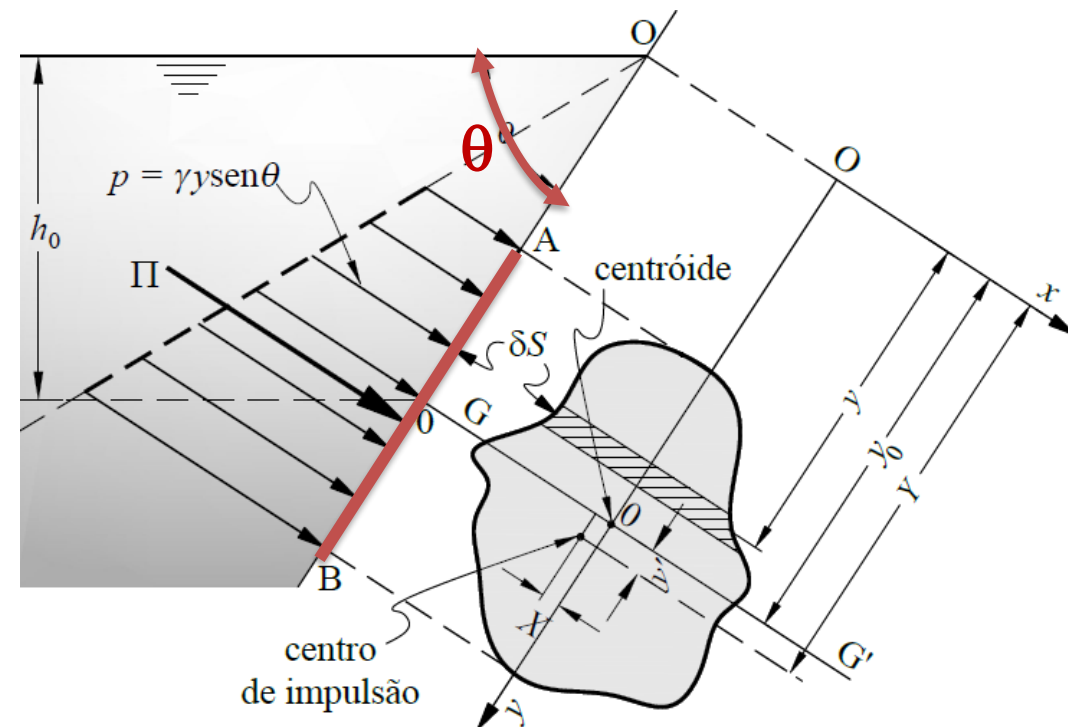
$$\Pi = \gamma h_0 S$$

sendo γ , o peso volúmico do fluido, h_0 , a profundidade no centroide da superfície e S , a área da superfície

ou

$$\Pi = p_0 S$$

sendo p_0 , a pressão no centroide da superfície e S , a área da superfície.



Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

- A **coordenada Y** do ponto de aplicação da impulsão é obtida através da **igualdade de momentos**

$$\Pi \times Y = \int_S y \times p dS$$

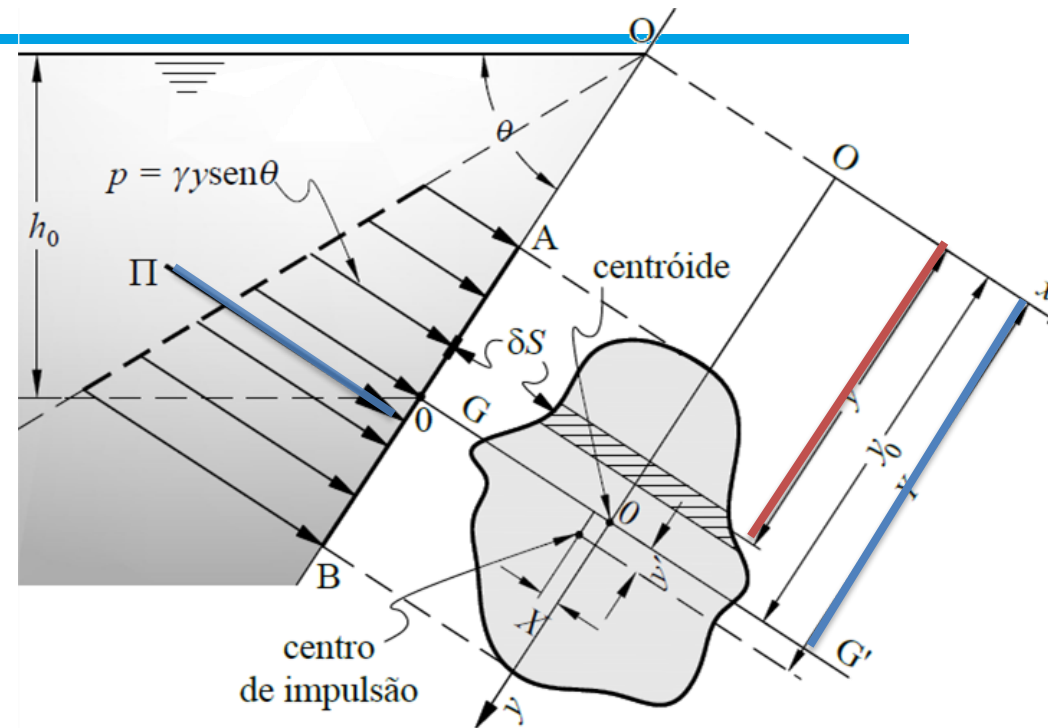
- Donde vem

$$\Pi \times Y = \int_S y (\gamma y \sin \theta) dS = \gamma \sin \theta \int_S y^2 dS$$

momento de inércia da superfície plana em relação a $Ox = I_x$

$$\Pi Y = \gamma \sin \theta I_x \quad \therefore \quad Y = \frac{\gamma \sin \theta I_x}{\Pi} = \frac{\gamma \sin \theta I_x}{\gamma y_0 \sin \theta S}$$

$$\therefore \quad Y = \frac{I_x}{y_0 S}$$



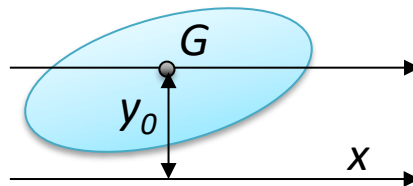
Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

- Continuando...

$$Y = \frac{I_x}{y_0 S}$$

- De acordo com o teorema de **Lagrange-Steiner**, o momento de inércia I_x relaciona-se com o **momento de inércia da superfície plana em relação ao eixo GG'** que passa pelo centroide e é paralelo ao eixo Ox, I_G :

$$I_x = I_G + Sy_0^2$$



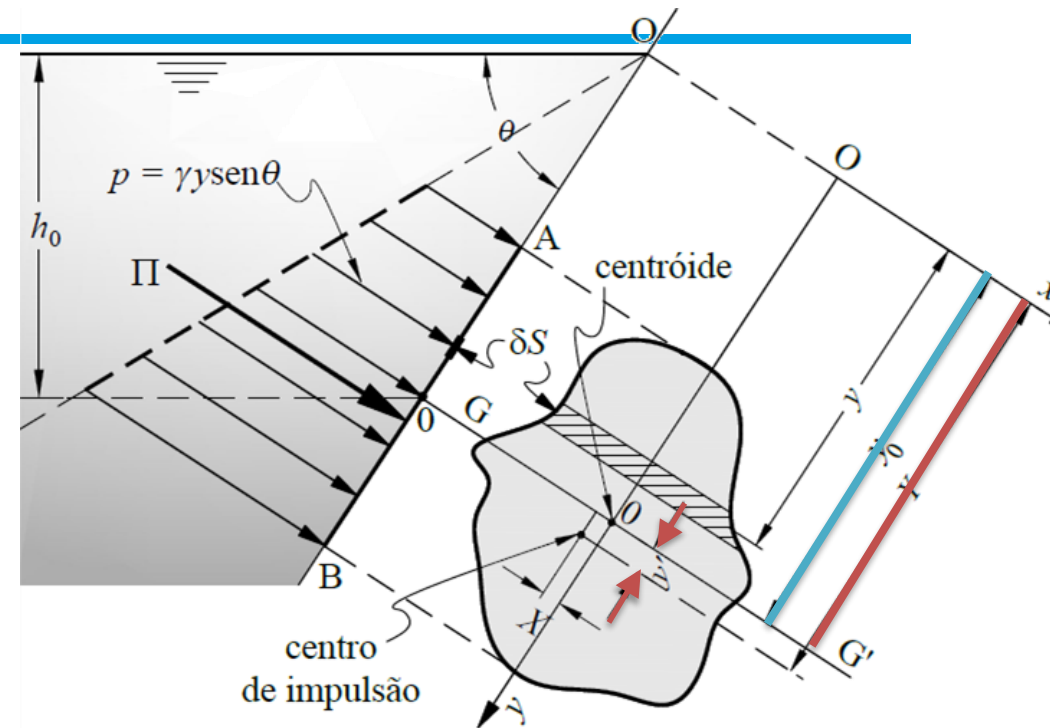
- donde

$$\gamma = \frac{I_G + Sy_0^2}{Sy_0}$$

$$\therefore Y = y_0 + \frac{I_G}{S y_0}$$

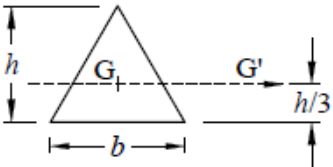
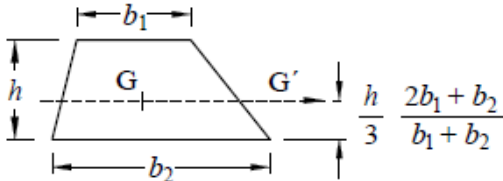
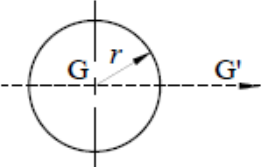
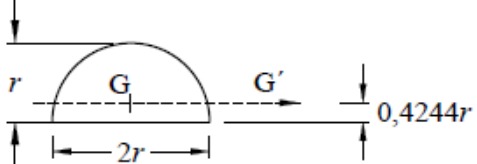
$$y' = \frac{I_G}{S y_0}$$

sendo I_G , o momento de inércia da superfície plana em relação a um eixo perpendicular à reta de maior declive do plano que passa no centroide da superfície plana



Impulsão sobre superfícies planas não horizontais

Momentos de inércia I_G tabelados

Figura e respetivo centróide, G	Área, S	Momento de inércia, $I_{GG'}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
	bh	$\frac{bh^3}{12}$
	$\frac{b_1 + b_2}{2} h$	$\frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$
	πr^2	$\frac{\pi r^4}{4}$
	$\frac{\pi r^2}{2}$	$0,1098r^4$

Impulsão sobre superfícies planas **não horizontais**

Método do diagrama de pressões

Caso particular: superfície com dois lados horizontais

- O módulo da impulsão Π sobre o retângulo é

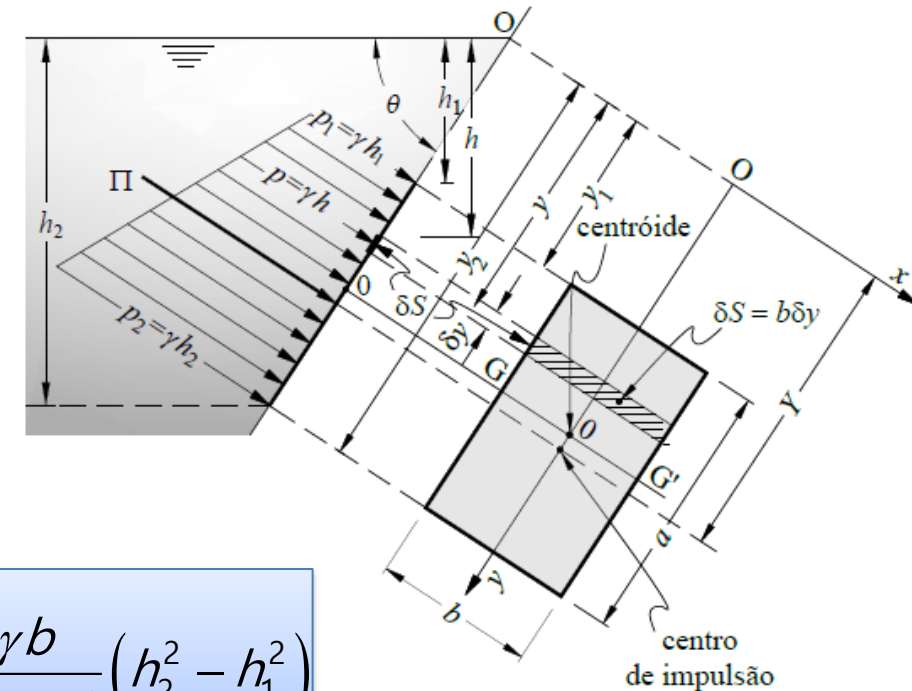
$$\Pi = \int_S p dS = b \int_{y_1}^{y_2} p dy$$

- A **impulsão** é igual ao produto da largura b do retângulo pela **resultante do diagrama de pressões ao longo da linha de maior declive**. Este diagrama é linear e as pressões nas extremidades são dadas por $p_1 = \gamma h_1$ e $p_2 = \gamma h_2$, assim:

$$\Pi = \frac{p_1 + p_2}{2} (y_2 - y_1) b \therefore \Pi = \gamma \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \left(\frac{h_2 - h_1}{\sin \theta} \right) b \therefore \Pi = \frac{\gamma b}{2 \sin \theta} (h_2^2 - h_1^2)$$

- A **posição Y do centro de impulsão** corresponde, necessariamente, à posição do **centroide do diagrama de pressões**. Demonstra-se que:

$$y' = \frac{\gamma}{12} \frac{(h_1 - h_2)^2}{h_1 + h_2}$$

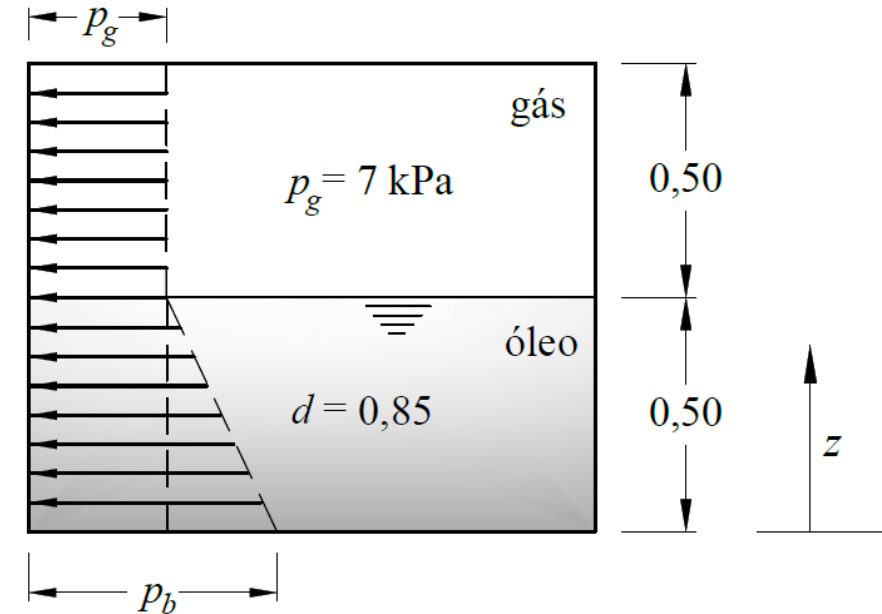


Exemplo 2.7

Enunciado

Um recipiente de forma cúbica, fechado, com 1 m de aresta, contém, até meia altura, um óleo de densidade 0,85, sendo a pressão do gás contido sua metade superior $p_g = 7 \text{ kPa}$. Admitindo que a pressão do gás é constante, determine:

- A impulsão total sobre uma das faces laterais do recipiente.
- A posição do centro de impulsão na mesma face.

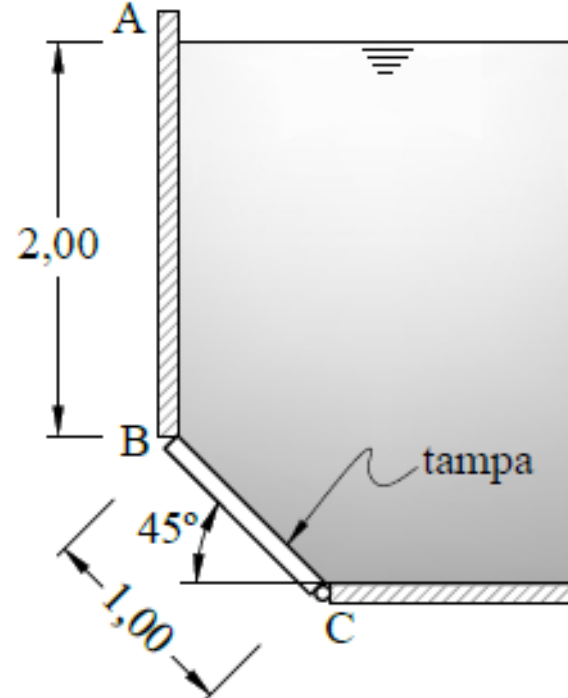


Problema 2.4

Problema 2.4*

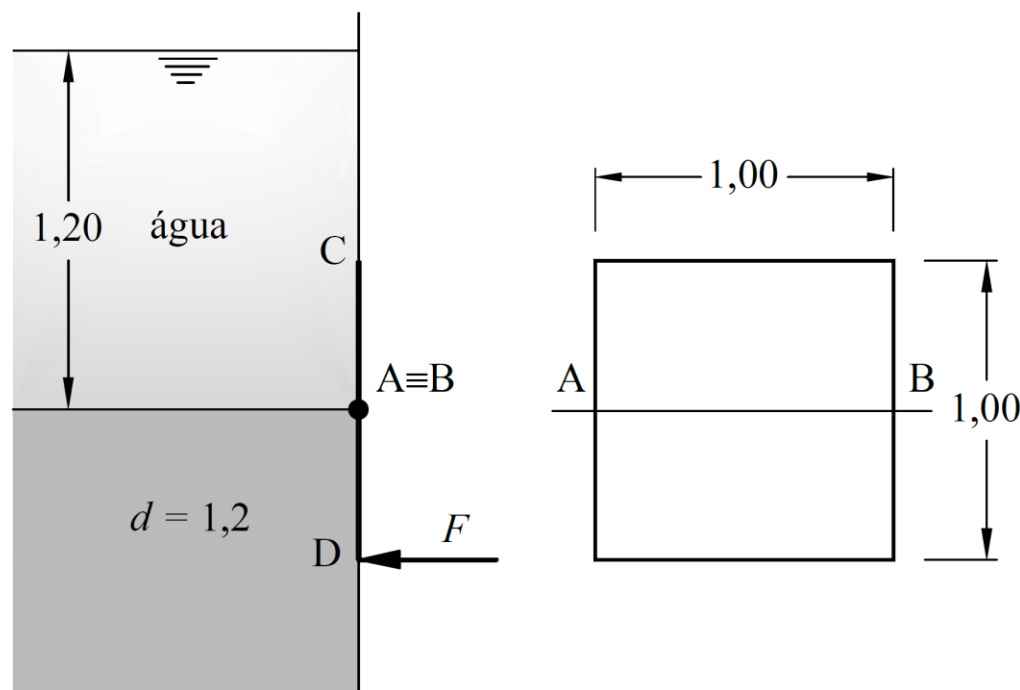
Na parede BC de um reservatório que contém água, existe uma tampa metálica quadrada com 1,00 m de lado, conforme se indica na Figura 2.41. A aresta superior da tampa, de nível, dista 2,00 m da superfície livre da água. Determine:

- os módulos da impulsão sobre a tampa e das suas componentes horizontal e vertical;
- a posição do centro de impulsão.



Exemplo 2.8 (impulsão com dois fluidos)

- Uma tampa quadrada com dois lados horizontais e com 1,00 m de lado obtura um orifício na parede vertical de um reservatório que contém água sobre um líquido com densidade 1,2. O plano de separação da água e do líquido passa pelo centro da tampa, que pode rodar em torno do eixo horizontal AB. Determine o módulo da força F a exercer em D para manter a tampa fechada



Estudo autónomo

- Estudar (Livro)
 - Secções 2.7 a 2.8
 - Exemplos 2.5, 2.6, 2.7*, 2.8*
- Resolver (Livro)
 - Problemas 2.4*, 2.5, 2.8

** problemas resolvidos nas aulas*