

HIDRÁULICA I

Licenciatura em Engenharia Civil

Hidrostática

Conteúdo da Aula

- Introdução
- Equação da Hidrostática generalizada (ou de Euler)
 - Exemplo 2.1
- Equação fundamental da Hidrostática
- Pressão absoluta e pressão relativa
 - Exemplo 2.2
 - Problema 2.1
- Manómetros
 - Exemplo 2.4

Hidrostática (origem etimológica da palavra)

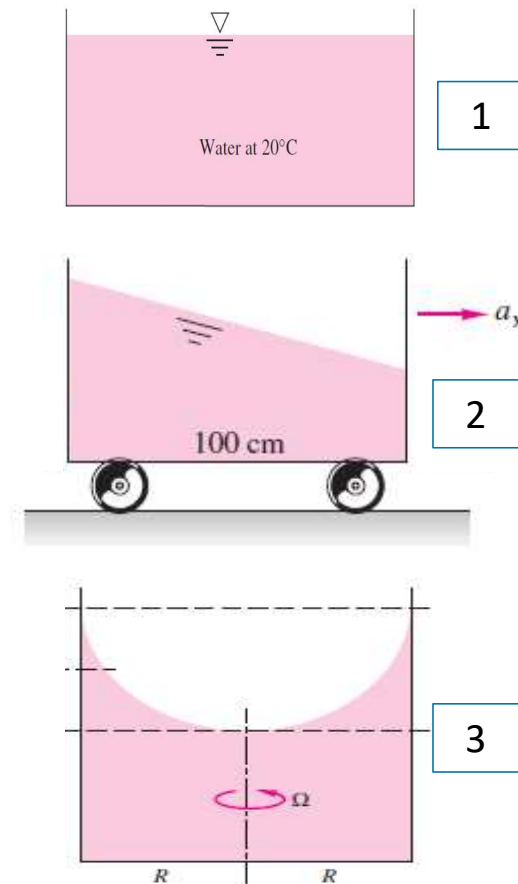
- Hidrostática = Hidro (água) + Estática (repouso)

água (hidro) por ter sido o primeiro fluido considerado neste ramo da Física.

repouso é o estado em que as partículas da água ou de outro fluido não exibem movimento relativo à escala macroscópica.

- Objetivo

- O estudo das forças exercidas pela e sobre a *água em repouso*, mas em sentido lato, os resultados da Hidrostática são também aplicáveis a outros fluidos. 1
- Aplica-se também a fluidos que não exibam movimento relativo entre as suas partículas, ou seja sujeitos a movimento de corpo rígido como acontece quando estão contidos em recipientes
 - *que se deslocam com movimento uniforme ou uniformemente acelerado* 2
 - *ou que rodam com velocidade angular constante* 3



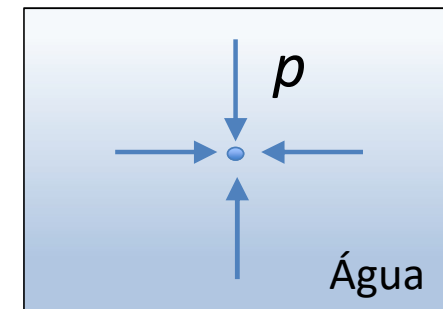
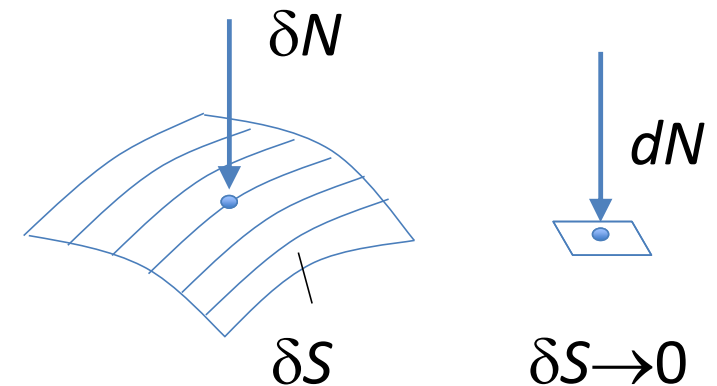
Princípio de Pascal

■ Pressão

- Para uma superfície elementar (reduzida a um ponto), tem-se

$$p = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta N}{\delta S} = \frac{dN}{dS}$$

- É uma grandeza escalar que corresponde ao módulo da força normal (força de pressão) por unidade de área que atua num dado plano do fluido.
- Num dado ponto de um fluido homogéneo* em repouso, a **pressão tem o mesmo valor em todas as direções**.



Equação da Hidrostática generalizada (ou de Euler)

- A única condição subjacente ao **princípio de Pascal** é a de que as **tensões tangenciais sejam nulas** (só há forças de pressão).
- Se um fluido se deslocar como um corpo rígido (**sem movimento relativo entre partículas**), o princípio de Pascal mantém-se válido.
- Se se aplicar o equilíbrio de forças a um elemento de fluido sujeito a **aceleração constante** $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ no **campo gravítico**, obtém-se, segundo x (2ª lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) :

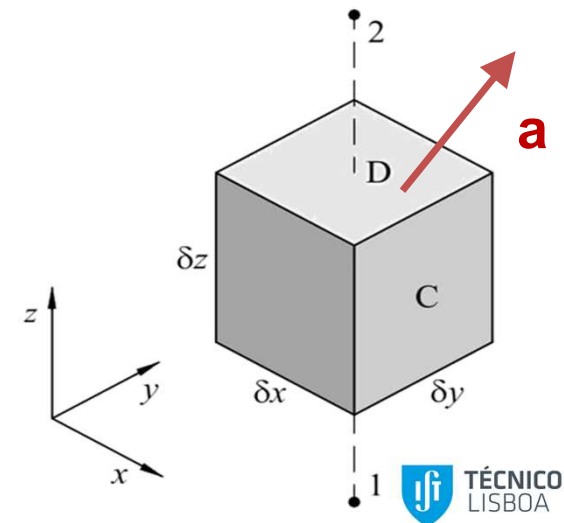
$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z = (\rho \delta V) a_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

- e para os outros dois eixos coordenados

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y$$

e

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z$$



Equação da Hidrostática generalizada (ou de Euler)

- Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \\ \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z \end{cases}$$

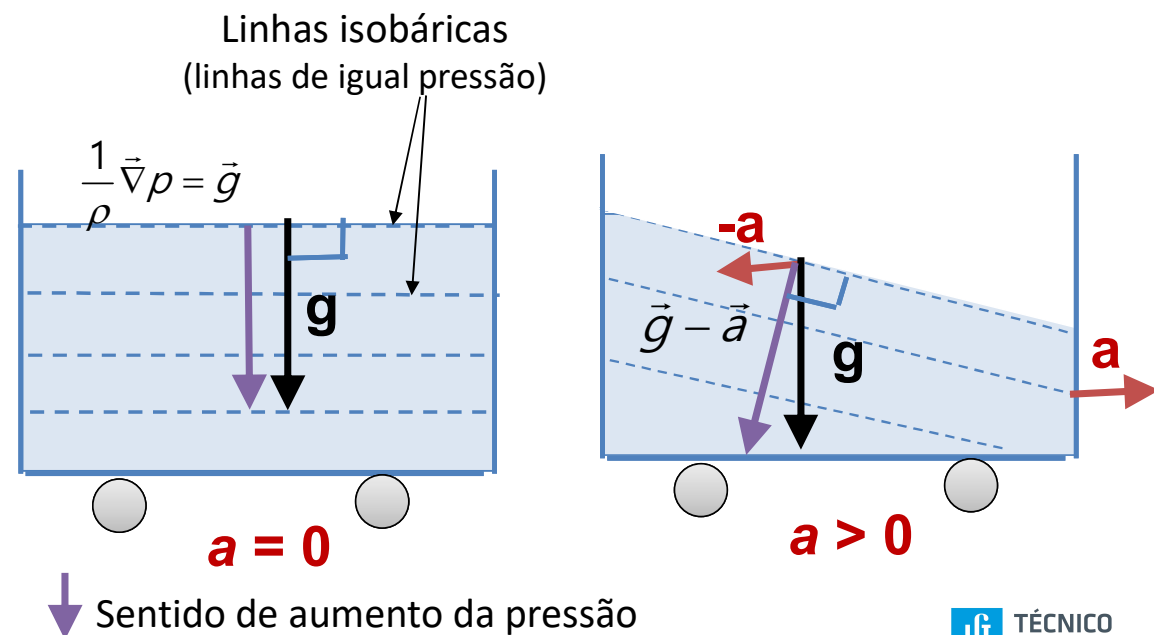
- ou, em notação vetorial:

$$\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} p = \rho (\vec{g} - \vec{a})$$

sendo $\rho \vec{a}$ a força de inércia por unidade de volume.

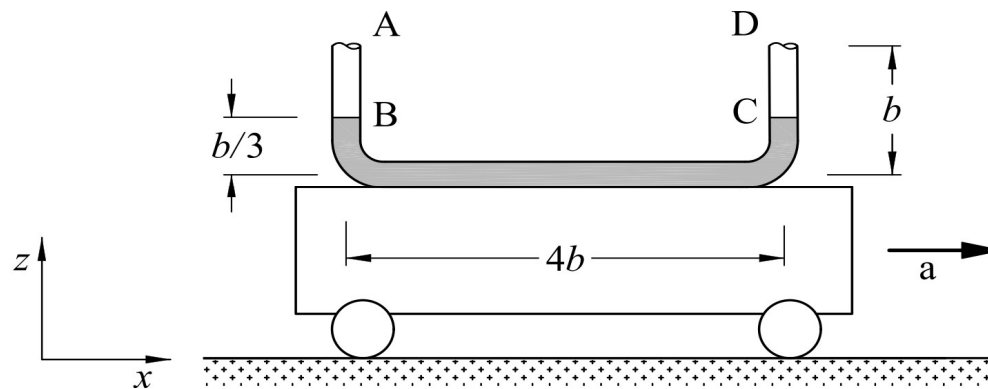
Equações fundamentais da Hidrostática para fluidos que se deslocam como corpo rígido no campo gravítico.

São também conhecidas por **equações de Euler**.



Exemplo 2.1

- Para medir a **aceleração de um corpo** móvel, utiliza-se o tubo de vidro ABCD de secção transversal pequena e uniforme, parcialmente preenchido com líquido e aberto nas extremidades A e D. A posição do líquido na situação de repouso é a indicada. O tubo está solidário com o corpo móvel.
- Desprezando os efeitos da capilaridade e da tensão superficial, determine a **aceleração máxima** que se pode medir sem perda de líquido.



Equação fundamental da Hidrostática (para aceleração nula)

- A equação fundamental da Hidrostática relaciona a **pressão num ponto** no interior de um fluido em repouso com a **posição desse ponto** e com a **peso volúmico do fluido**

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

ou

$$z_2 - z_1 = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho g} dp$$

- Para fluidos incompressíveis

$$\frac{p}{\gamma} + z = cte$$

ou

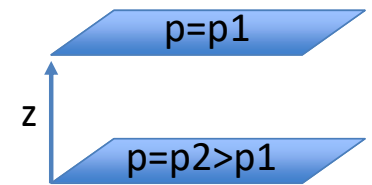
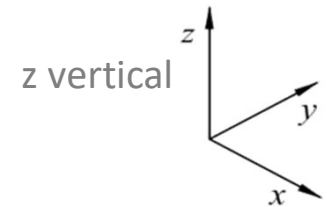
$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

ou

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = 0$$

Equação fundamental da Hidrostática

- Em síntese: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$
- Estas relações mostram que:
 - a pressão é constante num plano horizontal xy de um fluido em repouso.
 - a pressão varia segundo z (diminuindo à medida que z aumenta).
- Da integração da equação segundo z decorre:



$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow$$

p só varia com z

$$z_2 - z_1 = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho g} dp$$

ou de forma equivalente

$$p_2 - p_1 = -g \int_{z_1}^{z_2} \rho dz$$

Esta equação requer o conhecimento da variação da massa volúmica ρ com a pressão (ou com a cota geométrica).

Equação fundamental da Hidrostática

- Esta equação permite calcular a diferença de pressão entre quaisquer dois pontos de um fluido em dois planos horizontais distintos, afastados da distância vertical h .
 - Para fluidos incompressíveis** ($\rho = \text{cte}$), como os líquidos para pequenas diferenças de cotas

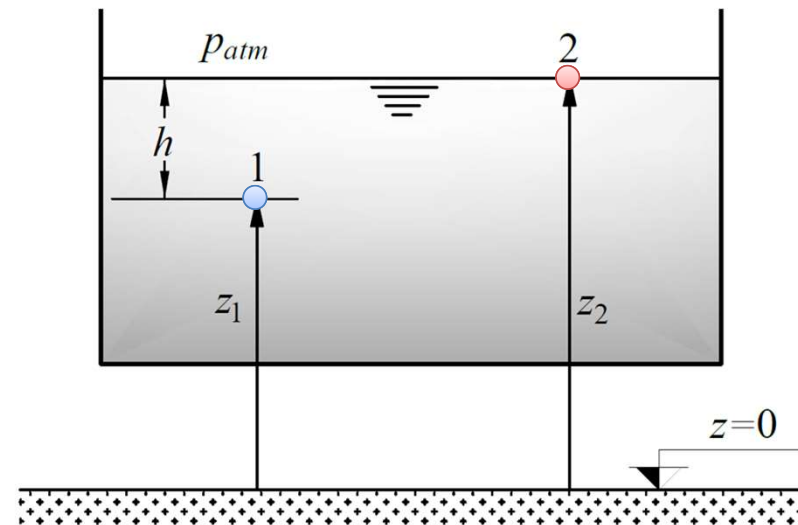
$$z_2 - z_1 = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho g} dp \quad \xrightarrow{\gamma = \rho g} \quad z_2 - z_1 = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma h$$

- Pode ser escrita de forma equivalente

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

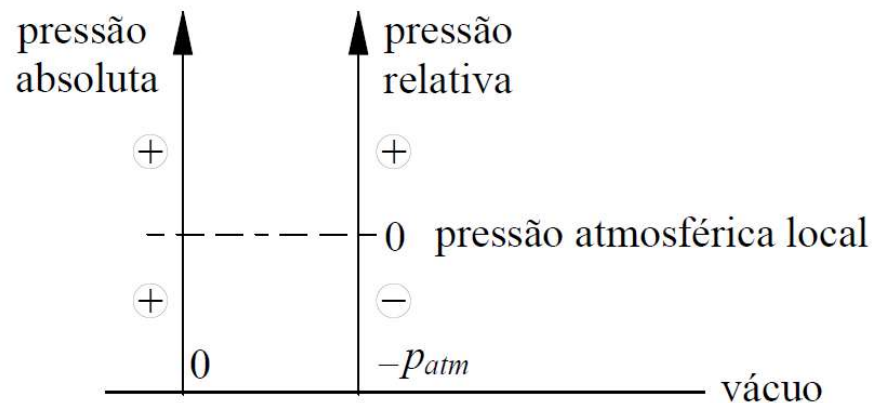
ou $\frac{p}{\gamma} + z = \text{cte}$

ou $\frac{d}{dz} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = 0$



Pressão absoluta, pressão relativa

- A pressão pode ser medida em **valor absoluto** ou em **valor relativo**, dependendo da pressão de referência.
 - **pressão absoluta**: se a pressão de referência for a do **vácuo** (ausência de matéria)
 - **pressão relativa**: se a pressão de referência for a **pressão atmosférica local**.



- Na maioria das situações práticas que se colocam aos engenheiros civis, utilizam-se **pressões relativas** porque o efeito da pressão atmosférica se faz sentir em toda a parte.

Pressão absoluta, pressão relativa

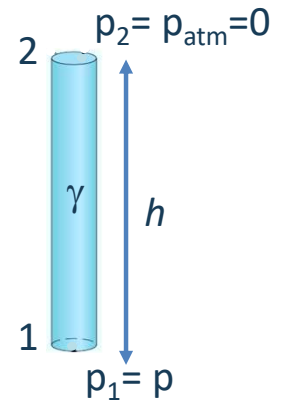
- A pressão exprime-se, no SI, em **newton por metro quadrado**, Nm^{-2} , ou **pascal**, Pa. Por vezes, recorre-se a **bar**, sendo:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 10^5 \text{ Pa}$$

- É frequente exprimir a pressão em **altura de coluna** de um determinado líquido.
 - Atendendo à equação fundamental da hidrostática, é a profundidade de fluido equivalente, h , medida a partir da superfície livre, sujeita à pressão atmosférica,

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p}{\gamma}$$

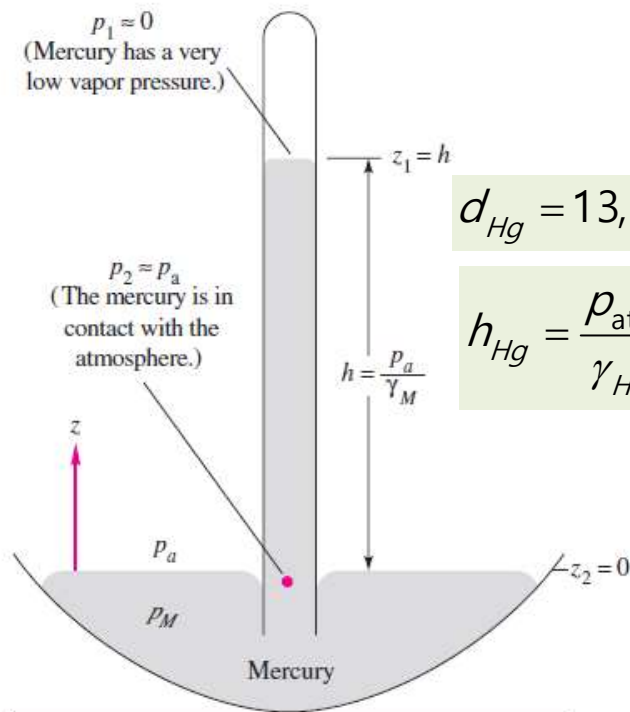
$p_{\text{atm}} = 0$



- Por exemplo, exprimindo a pressão atmosférica normal em altura de coluna de **mercúrio** (Hg), cuja densidade é 13,6, ou de **água** ($d = 1$), tem-se:

$$p_{\text{atm}} = 1,012 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \begin{cases} \Rightarrow h_{\text{Hg}} = \frac{p_{\text{atm}}}{\gamma_{\text{Hg}}} = \frac{1,012 \times 10^5 \text{ Pa}}{13,6 \times 9800 \text{ Nm}^{-3}} = 760 \text{ mmHg} \\ \Rightarrow h_{\text{agua}} = \frac{p_{\text{atm}}}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{1,012 \times 10^5 \text{ Pa}}{9800 \text{ Nm}^{-3}} = 10,33 \text{ m c.a.} \end{cases}$$

Pressão absoluta, pressão relativa



Barómetro de mercúrio

$$d_{Hg} = 13,6$$

$$h_{Hg} = \frac{p_{atm}}{\gamma_{Hg}} = 760 \text{ mmHg}$$

$$p_{atm} = 1,012 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$d_{\text{água } 4^\circ\text{C}} = 1$$

$$h_{\text{água}} = \frac{p_{atm}}{\gamma_{\text{água}}} = 10,33 \text{ m c.a.}$$



Comparação das alturas de coluna de líquido

Exemplo 2.2

Se for injetado gás sob pressão no reservatório esférico representado na Figura 2.7, a pressão do gás e os níveis dos líquidos variam. Admitindo que os líquidos são praticamente incompressíveis, determine a variação de pressão do gás necessária para que o desnível x aumente 5 cm, sabendo que o tubo tem diâmetro constante.

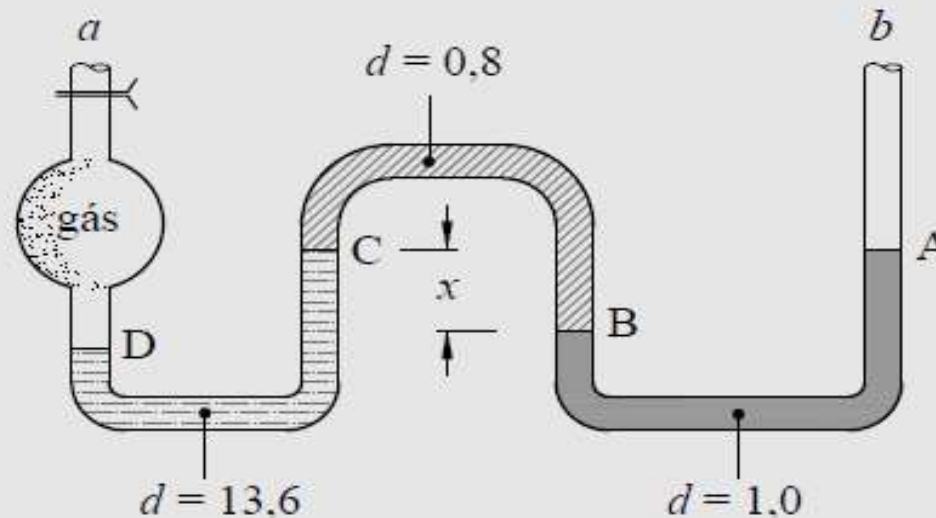
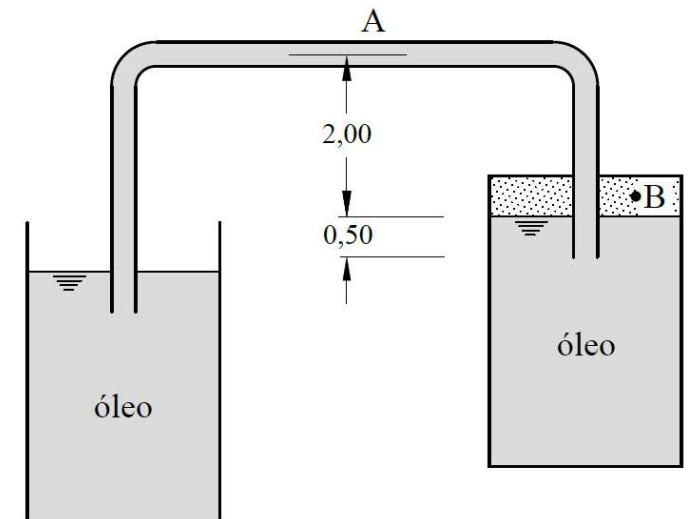


Figura 2.7

Problema 2.1

- O tubo e os reservatórios representados na figura contêm óleo com densidade igual a 0,85.
- O reservatório do lado esquerdo é aberto e o do lado direito é fechado.
- Nestas condições, tendo em consideração o desnível da superfície do óleo nos reservatórios, determine as pressões nos pontos A e B e exprima-as em altura de coluna de água.



Manómetros

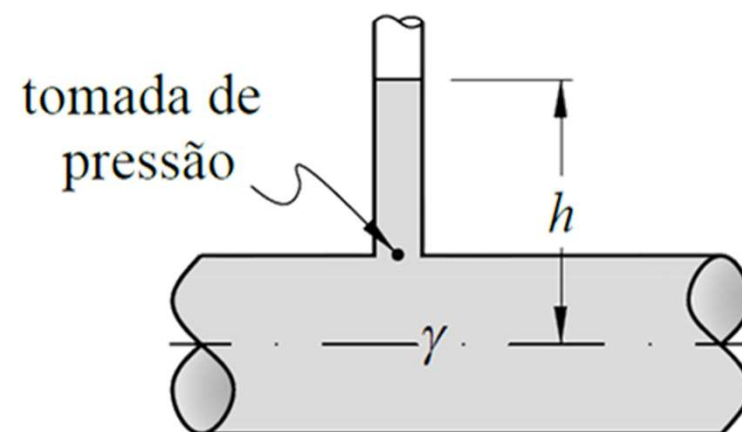
- A pressão pode-se medir com recurso a equipamentos diversos, mais ou menos sofisticados (por exemplo, **manómetros** e **transdutores de pressão**).



transdutor de pressão

- **Manómetro simples (piezómetro ou tubo piezométrico)**

- consiste num tubo ligado a uma conduta através de um orifício efetuado na parede – a **tomada de pressão**
- a **pressão relativa** no eixo da conduta expressa em metros de coluna de líquido é $p = \gamma h$ ($p > 0$)
com γ = peso volúmico do líquido



- Limitações |

- requer cuidados e soluções especiais para a medição de **pressões negativas** ou de **pressões muito elevadas**.
- não permite a medição da **pressão de gases**.

Manómetros

- **Manómetro em U ou manómetro diferencial**

- Permite utilizar um líquido com um peso volúmico γ_m diferente do γ do fluido na conduta.

- Vantagem |

- medir pressões muito elevadas ou pressões de gases.

- A pressão é dada por:

$$\cancel{p}_1 = p_{atm} = 0$$

$$\cancel{p}_2 = \cancel{p}_1 + \gamma_m \Delta h$$

$$\cancel{p}_3 = \cancel{p}_2$$

$$p_4 = \cancel{p}_3 - \gamma h$$

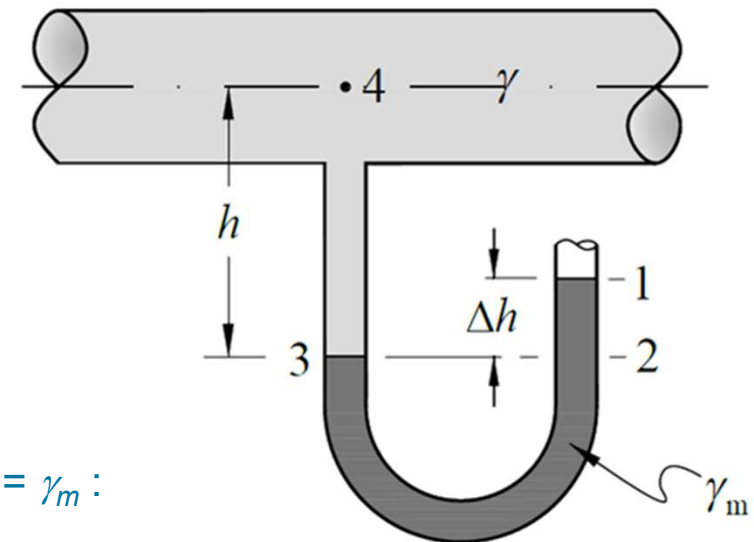
$$p_4 = \gamma_m \Delta h - \gamma h$$

- Se o fluido for um gás, $\gamma h \approx 0$

$$\Rightarrow p_4 = \gamma_m \Delta h$$

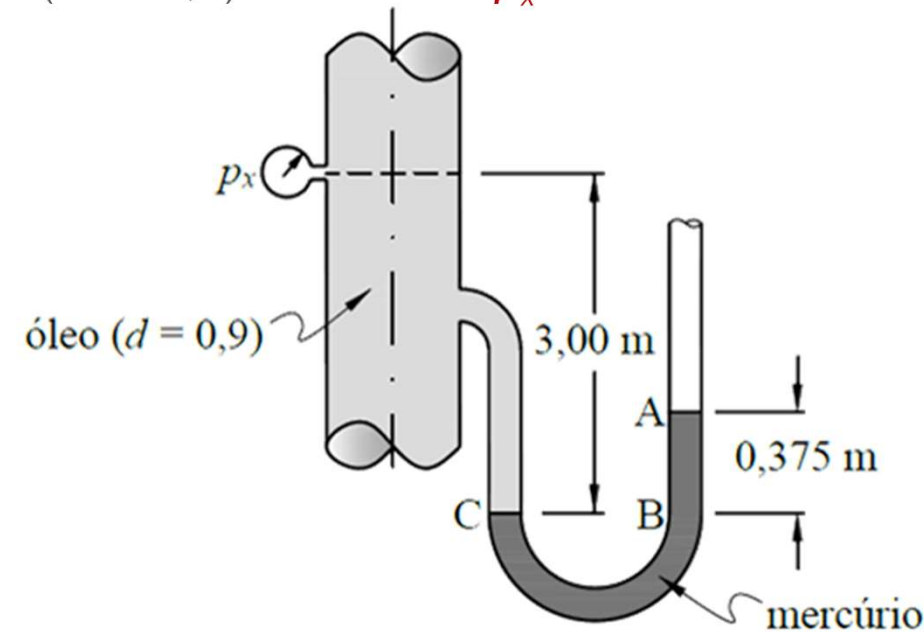
- Se o fluido for líquido (único), $\gamma = \gamma_m$:

$$\Rightarrow p_4 = \gamma (z_1 - z_4)$$



Exemplo 2.4

- A conduta vertical contém óleo ($d = 0,9$). Está equipada com um manómetro comercial onde se lê a pressão p_x e um manómetro em U com mercúrio ($d = 13,6$). Determine p_x .



Estudo autónomo

- Estudar (Livro)
 - Secções 2.2 a 2.6
 - Exemplos 2.2 e 2.3
- Resolver (Livro)
 - Problemas 2.2 e 2.3