

Cálculo Diferencial e Integral III
2026/2027
Curso: LEC e LEME

Ficha 6
Sistemas de EDOs, diagramas de fase

1. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

2. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

3. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Calcule a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

(c) Em termos de coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, verifique que o sistema da alínea b) pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} = r.$$

Resolva para r em função de θ .

(d) Esboce o diagrama de fase do sistema da alínea b).

6. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

7. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

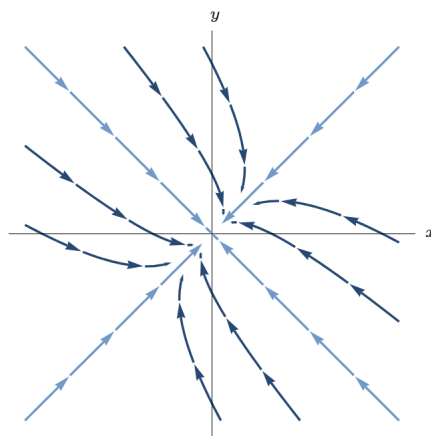
$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluções

1. (a) $X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $X(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} -3t + 4 \\ 3t - 3 \end{bmatrix}$

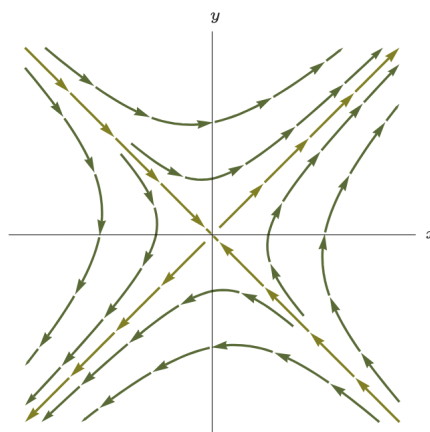
2.

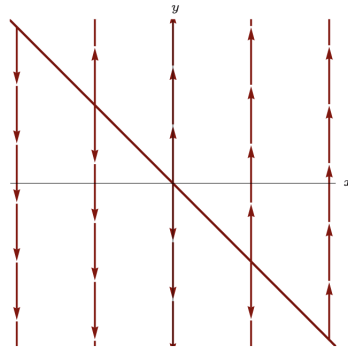
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



3.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$





4.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0)e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. a)

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}.$$

c) Substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ no sistema obtém-se

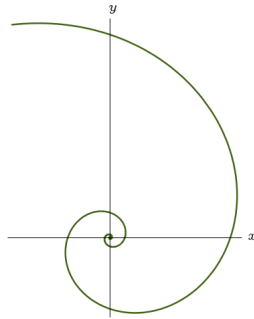
$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = r \cos \theta - r \sin \theta, \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = r \cos \theta + r \sin \theta. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos \theta$, a segunda equação por $\sin \theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente, substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$. Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r.$$

Resolvendo esta equação diferencial obtém-se $r(\theta) = Ce^\theta$, onde C é uma constante real.

d)



6. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

7. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$