

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Cursos: LEC e LEME

Ficha 5

Teorema de Picard-Lindelöf, Exponencial de uma matriz

1. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

tem infinitas soluções, e explique porque é que isso não contradiz o Teorema de Picard-Lindelöf.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \end{cases},$$

- (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema numa vizinhança suficientemente pequena de $\frac{1}{2}$ onde esteja definida.
- (b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.
- (c) Diga, justificando, porque não há contradição com o Teorema de Picard-Lindelöf.

3. Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para $y' = t^2 + y^2$ com $y(0) = 0$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \begin{cases} \operatorname{tg} y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Tomando como iterada de Picard de ordem zero $y_0(t) = \pi/4$, calcule $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Qual o domínio de y_2 ?

5. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad A = 0 & \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} & \text{(f)} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Determine a solução geral dos sistemas:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$$

7. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{At} e^{(B-A)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

Soluções

1. Com a solução de equilíbrio $y(x) \equiv 0$ e a solução geral $y_c(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$, $c \in \mathbb{R}$, podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI):

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

– para $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$

$$y_\alpha^-(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x < \alpha \\ 0 & \text{se } x \geq \alpha \end{cases}$$

2. (a) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$

(b) Com a solução do (PVI) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$ e a solução geral $y(t) = \sqrt{1 - c(1-t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI) definidas em $\mathbb{R}$ por

$$y_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + 12(1-t)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \sqrt{1 - c(1-t)^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. $y_0(t) = 0$, $y_1(t) = t^3/3$, $y_2(t) = t^3/3 + t^7/63$.

4. $y_0(t) = \pi/4$, $y_1(t) = \pi/4 + t$, $y_2(t) = \pi/4 - 1/2 \ln 2 - \ln[\cos(\pi/4 + t)]$, para $-3\pi/4 < t < \pi/4$.

5. (a) $e^{At} = I$ (b) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$ (c) $e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$

(d) $e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 12t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$

(f) $e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1 + 2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$