

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Curso: LEC e LEME

### Ficha 3 Teorema de Stokes

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$

e a superfície  $S$  igual ao hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calcule o fluxo do  $\text{rot } F$  através de  $S$  utilizando

- (a) A definição de fluxo.  
(b) O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular  $\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS$  sendo

- (a)  $S$  é a porção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que se encontra no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , em que se considera a normal  $n$  com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

- (b)  $S$  é o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ , em que se considera a normal  $n$  com primeira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1)z, -y).$$

- (c)  $S$  a superfície parametrizada por  $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$ ,  $u + v < 1$ , sendo  $n$  a normal com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$ , em que:

- (a)  $C$  é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  com o plano  $y = z$ , percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (y + z, -z, y)$$

- (b)  $C$  é a curva de intersecção do plano  $x + z = 5$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ , percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$$

- (c)  $C$  é o triângulo de vértices  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ , orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x, y, z) = (x - z, y - x, z - xy).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial  $F$  ao longo da curva  $C$ , sendo:

- (a)  $C$  o bordo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, 0 < x < 1\},$$

orientada com uma normal à sua escolha, e

$$F(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

- (b)  $C$  é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e  $F$  o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3).$$

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal  $\nu$  cuja segunda componente é positiva.

- (a) Sabendo que  $S$  tem densidade superficial de massa dada por  $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$  calcule a massa total de  $S$ .  
 (b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, -y, -z)$$

através de  $S$  no sentido da normal  $\nu$ .

6. Sejam  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $V$  um domínio nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3} \vec{r}$$

através da superfície  $\partial V$  é igual a zero quando a origem está no exterior de  $V$ . Qual será o valor desse fluxo quando  $V$  contiver a origem no seu interior?

## 1 Soluções

1.  $-\pi$
2. (a) 0  
(b)  $-2\pi$   
(c)  $-\frac{5}{6}$
3. (a)  $-2\pi$   
(b)  $9\pi$   
(c)  $\frac{3}{2}$
4. (a) 0  
(b) 0
5. (a)  $33\pi$   
(b)  $-15\pi$
6.  $4\pi$