

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Curso: LEC e LEME

Ficha 2

Operadores diferenciais, Fluxo e Teorema de Gauss

1. Seja f um campo escalar e F um campo vectorial, ambos de classe C^2 . Diga se cada expressão seguinte tem significado e, nesse caso, se é um campo vectorial ou escalar.

- (a) $\text{rot}(\nabla f)$
- (b) $\nabla(\text{div } F)$
- (c) $\text{div}(\text{div } F)$
- (d) $\text{div}(\text{rot}(\nabla f))$

2. Determine o rotacional e a divergência dos seguintes campos vectoriais

- (a) $F(x, y, z) = (\log x, \log(xy), \log(xyz))$
- (b) $F(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z)$
- (c) $F(x, y, z) = (0, e^{xy} \sin z, y \arctg \frac{x}{z})$

3. Verifique as seguintes identidades sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

- (a) $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$
- (b) $\nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$
- (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$
- (d) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

4. Verifique se os seguintes campos vectoriais são irrotacionais e/ou incompressíveis:

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy) \quad , \quad G(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

5. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da superfície S orientada da forma indicada:

(a) $F(x, y, z) = (0, xz, 3xyz^2)$ e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 + y^3, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

(b) $F(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 < z < 1$$

orientado com a normal n com terceira componente positiva.

(c) $F(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$, em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a superfície esférica de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

6. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da fronteira da região E segundo a normal exterior utilizando a definição de fluxo e o teorema da divergência, sendo:

(a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ e E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

7. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ onde

(a) $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$, S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$ e n é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.

(b) $F(x, y, z) = (y^3 e^z, -xy, x \operatorname{arctg} y)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

(c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (x^3 y, -x^2 y^2, -x^2 yz)$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$.

(d) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (3x, xz, z^2)$ e S é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano- xy .

(e) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (x^4, -x^3 z^2, 4xy^2 z)$ e S é a superfície do sólido constituído pela parte do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ limitada pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$.

8. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ onde

$$F(x, y, z) = \left(z^2 x, \frac{1}{3} y^3 + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2 \right),$$

S é o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e n é a normal unitária exterior a S .

Nota: S não é uma superfície fechada.

9. Seja $F = (z \arctg y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de F através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima.

Nota: S não é uma superfície fechada.

10. Calcule o volume do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$$

usando o teorema da divergência.

11. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Mostre que

$$\text{Volume } E = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo $\vec{\nu}$ a normal unitária exterior a S .

12. Demonstre a identidade abaixo, supondo que S e E satisfaçam as condições do teorema da divergência e que as funções escalares e as componentes dos campos vectoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$

Sugestão: Use o teorema da divergência e o facto de $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$.

13. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e f uma função escalar de classe C^2 , mostre que

$$\iint_S D_{\vec{N}} f dS = \iiint_E \nabla^2 f dV$$

onde $D_{\vec{N}} f$ é a derivada de f na direcção da normal a S .

Soluções:

1. (a) é um campo vectorial. (b) é um campo vectorial. (c) não tem significado pois $\operatorname{div} F$ é um campo escalar. (d) é um campo escalar.
2. (a) $\operatorname{rot} F = \left(\frac{1}{y}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ e $\operatorname{div} F = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
(b) $\operatorname{rot} F = 0$ e $\operatorname{div} F = 1$
(c) $\operatorname{rot} F = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{z} - e^{xy} \cos z, -\frac{yz}{x^2+z^2}, ye^{xy} \operatorname{sen} z\right)$ e $\operatorname{div} F = xe^{xy} \operatorname{sen} z - \frac{xy}{x^2+z^2}$
- 3.
4. F é irrotacional e incompressível; G é irrotacional e não é incompressível.
5. (a) 0
(b) 0
(c) $4\pi h(1)$
6. (a) 4π (b) $\pi/2$
7. (a) 36π (b) $-\frac{1}{24}$ (c) 0 (d) $\frac{136}{3}\pi$ (e) $\frac{2\pi}{3}$
8. $\frac{13}{20}\pi$
9. $3\pi/2$
10. $\pi/2$