

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Curso: LEC e LEME

Ficha 1

Superfícies e Integrais de Superfície

- Determine se os pontos $P(3, -1, 5)$ e $Q(-1, 3, 4)$ pertencem à superfície parametrizada por $g(u, v) = (u + v, u^2 - v, u + v^2)$.
- Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:
 - o plano que passa pelos pontos $(1, 2, -3)$, $(2, 3, -4)$ e $(2, 1, -2)$.
 - A porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.
 - A porção no primeiro octante do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.
 - A parte do plano $z = x + 3$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por
 - $g(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$ com $u^2 + v^2 < 1$
 - $g(u, v) = (2 \sin u, 3 \cos u, v)$, $0 < v < 2$
 - $g(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \frac{1}{v^2})$ com $0 \leq u < 2\pi$ e $v > 0$.
 - $g(u, v) = (u + v, 3 - v, 1 + 4u + 5v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$.
- Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \sin v$, $z = c \sinh u$, representam um hiperbolóide com uma folha.
- Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, orientada para fora.
- Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u, v)$ no ponto especificado.
 - $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$ em $u = 1$, $v = 1$.
 - $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$ no ponto $(2, 3, 0)$.
 - $g(u, v) = (\arctg(uv), e^{u^2 - v^2}, u - v)$ no ponto $g(1, -1)$.
- Considere o parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
 - Determine uma representação paramétrica $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície.
 - Calcule a equação do plano tangente à superfície no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.

8. Calcule a área da superfície dada por:

(a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

(b) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ e $u^2 + v^2 \leq 1$.

(c) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra no interior do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(d) $g(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ e $u^2 + 4v^2 \leq 1$.

(e) Porção da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e acima do plano xoy .

9. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (uv, u + v, u - v)$$

(a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença à superfície

(b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2 + v^2 \leq 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

10. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4 - x^2 - z^2, y \geq -5\}$. Sendo a densidade em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$, calcule a massa e as coordenadas do centro de massa de S .

11. Calcule a massa e o centro de massa da superfície de um cone cujo raio da base é R e cuja altura é h . Admita que a densidade de massa é igual à distância do ponto ao eixo de simetria do cone.

1 Soluções

1. P pertence à superfície e Q não pertence à superfície.
2. (a) $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = -3 - u + v$ com $u, v \in \mathbb{R}$
 (b) $x = u$, $y = 4 \cos \theta$, $z = 4 \sin \theta$ com $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 (c) $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $z = r$, com $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
 (d) $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $z = 3 + r \cos(\theta)$, onde $0 \leq r < 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
3. (a) Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \geq 0$.
 (b) Parte do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em $0 \leq z \leq 2$
 (c) Gráfico de $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
 (d) O plano $4x - y - z = -4$.
4. Note que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
5. Sendo a superfície dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, então (por exemplo)

$$\vec{N}(x, y, z) = \frac{1}{2} \nabla F = (x, y, z)$$

e

$$\nu(x, y, z) = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) = \frac{1}{3} (x, y, z)$$

para cada (x, y, z) satisfazendo $F(x, y, z) = 0$.

6. (a) $x + y - 2z = 0$
 (b) $3x - y + 3z = 3$
 (c) $(x, y, z) = (-\frac{\pi}{4}, 1, 2) + s(-\frac{1}{2}, 2, 1) + t(\frac{1}{2}, 2, -1)$, $s, t \in \mathbb{R}$.
7. (a) $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, com $u, v \in \mathbb{R}$.
 (b) $\frac{2\pi}{a}x + z = -\pi^2$
8. (a) $A(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (b) $A(S) = \pi\sqrt{3}$
 (c) $A(S) = \pi(2 - \sqrt{2})$
 (d) $A(S) = \frac{\pi}{2}$
 (e) $A(S) = 16$
9. (a) $c = \frac{1}{4}$
 (b) $A(S) = (\sqrt{6} - \frac{4}{3}) 2\pi$
10. $M = 9\pi$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, -\frac{1}{2}, 0)$.
11. $M = \frac{2}{3}\pi R^2 \sqrt{R^2 + h^2}$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{3}{4}h)$.