

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Cursos: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 6 Exponencial de uma matriz, Sistemas de EDOs

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Quais são os valores próprios de A ?
- (b) Quais são os vectores próprios de A ?
- (c) Determine uma matriz de mudança de base, S , que diagonaliza A , e determine a sua inversa, S^{-1} .
- (d) Calcule e^{At} .
- (e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

- (g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

- (a) Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (3 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5. \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 1 e 5.

- (b) Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 satisfazem

$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b.$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 satisfazem

$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b.$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}.$$

(c) Mudando para uma base de vectores próprios de A , a transformação linear dada por A fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas primeira e segunda colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

(d) De acordo com a alínea anterior,

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix}.$$

(e) A solução deste problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t} + e^t}{2} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(f) A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ c_2 e^{5t} - c_1 e^t \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comentário: A solução acima pode ser escrita

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

As colunas de e^{At} formam uma base das soluções da equação dada. Como S é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At}S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At}S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral. $\diamond$

(g) Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix},$$

ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}.$$

De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

□

2. Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At} .

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução:

(a) Esta matriz A só tem um valor próprio:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (-\lambda)(-2 - \lambda) + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1. \end{aligned}$$

Os vectores próprios são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio e procura-se um vector próprio generalizado, w , a associado a v :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff c + d = 1.$$

Escolhe-se a solução $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Quando se detecta que esta matriz 2×2 tem apenas o valor próprio -1 , pode-se concluir que a sua forma canónica de Jordan tem apenas um bloco. Com efeito, se a forma canónica de Jordan J tivesse dois blocos, seria a matriz diagonal $J = -I$, pelo que a própria matriz A teria que ser

$$A = SJS^{-1} = S(-I)S^{-1} = -SS^{-1} = -I,$$

o que é falso. ◇

(b) Nota-se que a matriz transposta A^T é um bloco de Jordan. Como

$$e^{A^T t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^T t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k t^k)^T}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right)^T = (e^{At})^T,$$

calcula-se

$$e^{A^T t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

e conclui-se que

$$e^{At} = (e^{A^T t})^T = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(c) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)\lambda = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 0.$$

Os vectores próprios associados a 1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = c = 0.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de 1.

Os vectores próprios associados a -1 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de -1 .

Os vectores próprios associados a 0 são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}.$$

Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de 0 .

Assim, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} - e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Ao encontrar 3 valores próprios diferentes para esta matriz 3×3 , pode-se concluir logo que ela é diagonalizável, ou seja, que existe uma base formada por vectores próprios de A , pois valores próprios diferentes admitem vectores próprios linearmente independentes.

◇

(d) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + (3-\lambda) = 0$$

$$\iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\iff \lambda = 3,$$

portanto A tem apenas o valor próprio 3.

Os vectores próprios são os vectores que verificam

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a + b + c = 0 .$$

Como há exactamente uma condição linear a que os vectores próprios têm obedecer, o espaço próprio tem dimensão $3 - 1 = 2$. Toma-se os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para formar uma base do espaço próprio, tendo tido o cuidado de escolher o vector v_2 pertencente ao espaço das colunas da matriz $A - 3I$. Calcula-se agora um vector próprio generalizado w associado a v_2 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Toma-se, por exemplo, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & te^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -te^{3t} & te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

□

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz são as soluções de

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \pm i. \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $-1 + i$ são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b.$$

Uma base do espaço próprio de $-1 + i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Os vectores próprios associados a $-1 - i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1 + i$. (De facto, se λ e $\bar{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real A , então $(A - \lambda I)v = 0 \iff (A - \bar{\lambda} I)\bar{v} = 0$.) Uma base do espaço próprio de $-1 - i$ é constituída pelo vector $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real. $\diamond$

(b) Em termos de

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

este problema de valor inicial escreve-se

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s) ds \\ -\int_0^t \sin(t-s) ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix}.$$

□

4. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Resolução: Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas $x_1 = y_1 - y_2$ e $x_2 = y_1 + y_2$. Como

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = t \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 4(y_1 + y_2) + t, \end{cases}$$

as novas funções satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + t. \end{cases}$$

A solução geral da primeira equação é

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração e^{-4t} e resolve-se como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = 4x_2 + t &\iff e^{-4t}\dot{x}_2 - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ &\iff \frac{d}{dt}(e^{-4t}x_2) = te^{-4t} \\ &\iff e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t} dt + c_2 \\ &\iff x_2(t) = e^{4t} \left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2 \right) \\ &\iff x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

onde c_2 é uma constante real arbitrária. Como $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, conclui-se que a solução geral pedida é

$$\begin{cases} y_1(t) &= \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) &= -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1 \end{cases}$$

onde $k_1 = \frac{c_1}{2}$ e $k_2 = \frac{c_2}{2}$ são constantes reais arbitrárias. □

Comentário: Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original. ◇

5. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule e^{At} .
 (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(t) = (0, 2e^t, e^t)$.

Resolução:

(a) Tendo em conta que A é uma matriz na forma canónica de Jordan (com dois blocos de Jordan):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(t) &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{A(t-s)} \mathbf{h}(s) ds \\
 &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{t-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\
 &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
 &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t \begin{bmatrix} 2t-2s \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
 &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} \int_1^t (2t-2s) ds \\ \int_1^t 2 ds \\ \int_1^t ds \end{bmatrix} = e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} (2ts-s^2)|_{s=1}^t \\ 2s|_{s=1}^t \\ s|_{s=1}^t \end{bmatrix} \\
 &= e^{A(t-1)} \mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} 2t^2 - t^2 - 2t + 1 \\ 2t - 2 \\ t - 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para concluir o cálculo, resta calcular a primeira parcela:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(t) &= e^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} t^2 - 2t + 1 \\ 2t - 2 \\ t - 1 \end{bmatrix} \\
 &= e^{t-1} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ 2(t-1) \\ t-1 \end{bmatrix} \\
 &= e^{t-1} \begin{bmatrix} t + e(t-1)^2 \\ 2e(t-1) \\ e(t-1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea.
 (b) Sendo $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

Resolução:

(a) Visto a matriz A ser da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Começemos por calcular $e^{A_1 t}$ tendo em conta que $A_1 = -2I + N$, onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N^2 = 0,$$

então $e^{-2It} = e^{-2t}I$ e

$$e^{Nt} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $(-2I)N = N(-2I)$ então:

$$e^{A_1 t} = e^{-2It} e^{Nt} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora calcular $e^{A_2 t}$. Os valores próprios de A_2 são $1 + 2i$ e $1 - 2i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v}_1 = (1, i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$. Sendo assim

$$A_2 = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e, consequentemente,

$$e^{A_2 t} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \frac{e^t}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$

e a solução geral da equação vectorial homogénea é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} \\ 3c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^t \cos(2t) + c_4 e^t \sin(2t) \\ -c_3 e^t \sin(2t) + c_4 e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$

com $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{2s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta pois que $y_2(t) = 1 - e^{-2t}$, pelo que:

$$y_2(3) = 1 - e^{-6}.$$