

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Cursos: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 5

Campo de direcções e Teorema de Picard-Lindelöf

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) y' = \frac{ty}{1+t^2}, \quad (b) y' = (2-y)(y-1),$$

$$(c) y' = y(1-y^2), \quad (d) y' = \frac{y+t}{y-t},$$

O que é um campo de direcções?

Um campo de direcções da equação diferencial

$$y' = f(t, y)$$

é um gráfico constituído por segmentos de recta orientados com origem em cada ponto, $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, onde f está definida. Cada um desses segmentos de recta deve ser tangente ao gráfico da solução da equação diferencial no ponto (t, y) ; ele é, na verdade, uma representação miniaturizada da recta tangente ao gráfico da solução da equação diferencial que passa no ponto (t, y) .

Pode-se traçar um campo de direcções de qualquer equação diferencial da forma $y' = f(x, y)$, mas o mesmo só tem utilidade quando f satisfaz as condições do teorema de Picard. Em particular, a unicidade de solução dos problemas de valor inicial é muito importante porque impede que os gráficos de duas soluções com condições iniciais distintas se intersectem; e isto possibilita o posicionamento relativo desses gráficos.

Como traçar um campo de direcções?

Para traçar um campo de direcções constroi-se um reticulado, por exemplo,

$$\{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

e calcula-se em todos os seus pontos o valor de $f(n, m)$. Os valores obtidos são o declive da recta tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto (n, m) . Desenha-se então um pequeno segmento com origem em (n, m) e com declive $f(n, m)$.

Uma vez traçado o campo de direções, podemos usá-lo para esboçar as soluções da equação diferencial. Se estivermos nas condições do teorema de Picard, a unicidade de solução de qualquer problema de valor inicial garante que duas soluções com origem em pontos iniciais distintos nunca se intersectam. Dado que este traçado envolve erros, é a unicidade de solução que torna possível o esboço de soluções qualitativamente semelhantes às soluções exactas.

Exemplo

Vamos traçar o campo de direções e esboçar algumas soluções da equação diferencial

$$y' = y - x$$

Vamos calcular y' usando alguns valores de $(x, y) \in \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2, -2 \leq n, m \leq 2\}$. Assim para $x = -2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	0	1	2	3	4

Para $x = -1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-1	0	1	2	3

Para $x = 0$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-2	-1	0	1	2

Para $x = 1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-3	-2	-1	0	1

e para $x = 2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-4	-3	-2	-1	0

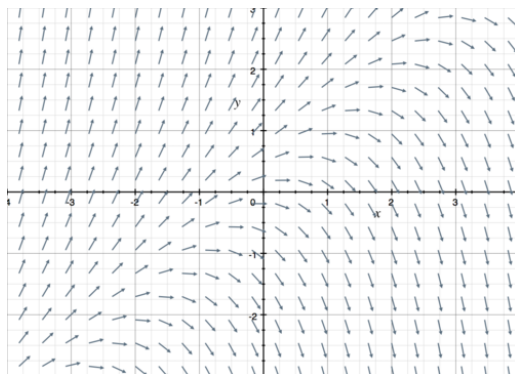


Figura 1: Campo de direções de $y' = y - x$

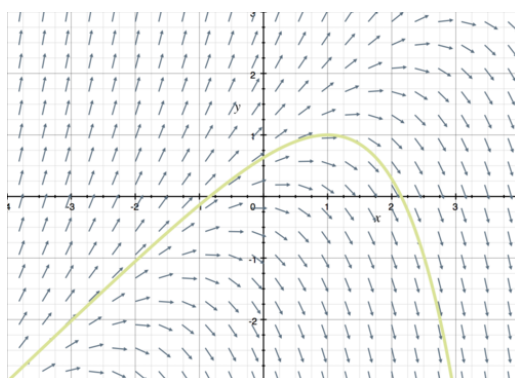


Figura 2: Campo de direções de $y' = y - x$ e a solução que passa em $(1, 1)$

Resolva os problemas cuja solução se apresenta de seguida.

Solução:

(a) $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

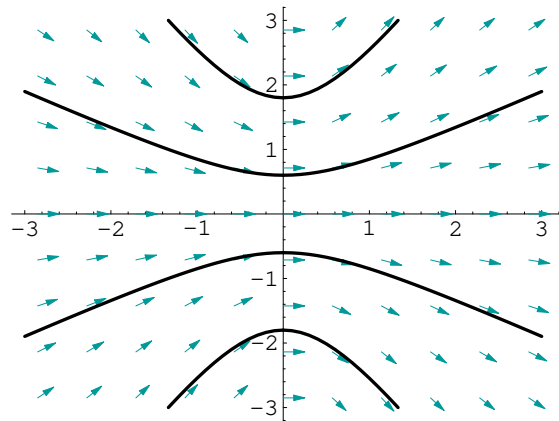


Figura 3: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{t y}{1 + t^2}$

(b) $y' = (2 - y)(y - 1)$

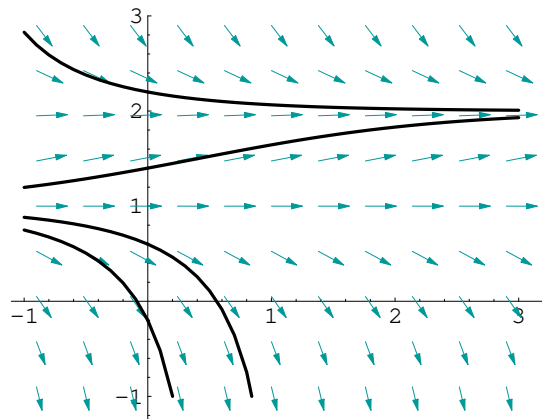


Figura 4: Campo de direções e algumas soluções de $y' = (2 - y)(y - 1)$

(c) $y' = y(1 - y^2)$

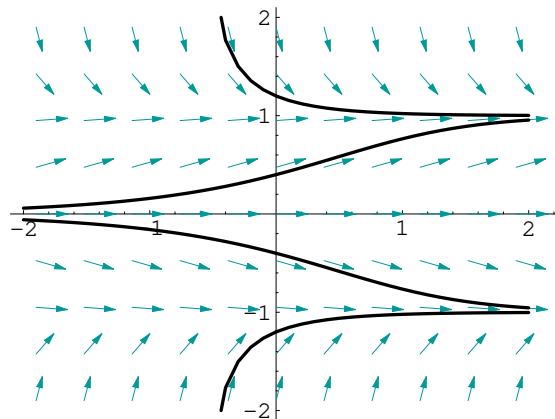


Figura 5: Campo de direções e algumas soluções de $y' = y(1 - y^2)$

(d) $y' = \frac{y + t}{y - t}$

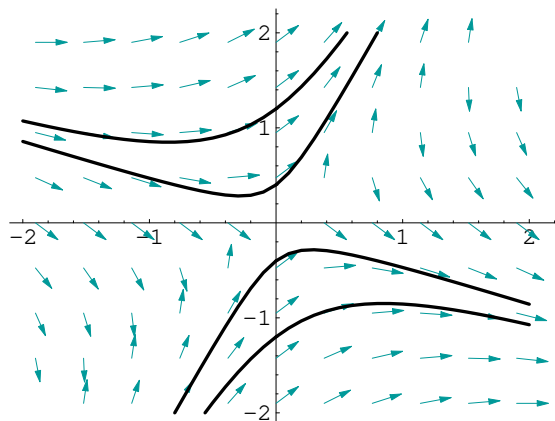


Figura 6: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{y + t}{y - t}$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2ty^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

Resolução

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-2/3} \frac{dy}{dt} = 2t \Leftrightarrow \int y^{-2/3} dy = \int 2t dt + c \Leftrightarrow 3y^{1/3} = t^2 + c \Leftrightarrow y(t) = \left(\frac{t^2 + c}{3} \right)^3$$

Visto termos obtido uma função polinomial, verifica-se que estas soluções são de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e também verificam a equação diferencial quando $c \leq 0$ e $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{-c}$ (basta substituir a solução geral obtida na equação diferencial). A solução que verifica a condição inicial $y(0) = 0$ é

$$y(t) = \frac{t^6}{27},$$

pelo que acabámos de obter uma segunda solução do PVI.

Podemos agora utilizar o método de “cortar” e “colar” a solução geral

$$y(t) = \frac{(t^2 + c)^3}{27} \quad \text{e} \quad y(t) \equiv 0$$

e, dessa forma, obter novas soluções do PVI. Para isso é certamente necessário tomar c tal que a função obtida é contínua no ponto de “colagem” (que designamos por t_1):

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \left(\frac{t^2 + c}{3} \right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -t_1^2$$

Assim, para $t_1 > 0$, define-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \frac{(t^2 - t_1^2)^3}{27} & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Calculando também as derivadas laterais de y_{t_1} no ponto de “colagem” (exercício) verifica-se que

$$f'_d(t_1) = 0 = f'_e(t_1)$$

Desta forma, y_{t_1} é diferenciável em $\mathbb{R}$ e verifica a equação diferencial para qualquer $t \in \mathbb{R}$; note que foi construída à custa de soluções da equação diferencial, portanto só faltava verificar que a satisfazia também no ponto de “colagem”. Além disso, $y_{t_1}(0) = 0$.

De igual modo, para cada $t_2 < 0$

$$y_{t_2}(t) = \begin{cases} \frac{(t^3 - t_2^2)^3}{27} & \text{se } t < s_0 \\ 0 & \text{se } t \geq s_0 \end{cases}$$

é também solução do PVI.

Finalmente, o facto de existir uma infinidade de soluções deve-se a que a função $f(t, y) = 2ty^{2/3}$ é contínua em $y \geq 0$, mas não é de classe C^1 em qualquer conjunto que contenha pontos da forma $(t, 0)$. De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4t}{3} y^{-1/3} = \frac{4t}{3\sqrt[3]{y}} \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad y \rightarrow 0^+.$$

3. Para p um número real $1 < p < 2$ considere

$$f(t, y) = p|y|^{\frac{p-1}{p}}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere-se o (PVI)

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

Mostre que o (PVI) admite uma infinidade de soluções. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

Resolução

Uma das soluções do (PVI) é a solução constante $y_c(t) \equiv 0$. Por outro lado, se $y(t) > 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{p} y^{-\frac{p-1}{p}} \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int \frac{1}{p} y^{-1+\frac{1}{p}} dy \right) = 1 \Leftrightarrow y^{1/p} = t + c \Leftrightarrow y(t) = (t + c)^p,$$

com $c \in \mathbb{R}$. Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que $t + c > 0$, isto é, $t > -c$.

Por outro lado, se $y(t) < 0$ então $|y| = -y$, pelo que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} (-y)^{-\frac{p-1}{p}} \frac{dy}{dt} = 1 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int -\frac{1}{p} (-y)^{-1+\frac{1}{p}} dy \right) = -1 \\ &\Leftrightarrow (-y)^{1/p} = -t + d \Leftrightarrow y(t) = -(d - t)^p, \quad \text{com } d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que $d - t > 0$, isto é, $t < d$.

Podemos definir uma infinidade de soluções “cortando e colando” os três tipos de soluções acima obtidas. Tomando quaisquer $c, d < 0$, e definindo

$$y_{c,d}(t) = \begin{cases} -(d - t)^p & \text{se } t < d \\ 0 & \text{se } d \leq t \leq -c \\ (t + c)^p & \text{se } t > -c \end{cases}$$

o aluno pode verificar facilmente que $y_{c,d}(t)$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Note que nos pontos $t = d$ e $t = -c$ deve verificar a igualdade dos limites e derivadas laterais.

Para verificar que não há contradição entre estas conclusões e o Teorema de Picard, note-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, 0)| &= \left| p|y|^{\frac{p-1}{p}} \right| = \underbrace{p|y|^{-\frac{1}{p}}}_{\downarrow \text{ quando } y \rightarrow 0} |y - 0| \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Desta forma, a derivada parcial de f relativamente a y em pontos da forma $(t, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$ é infinita, pelo que f não é de classe C^1 em qualquer conjunto aberto que contenha o eixo $y = 0$.

Concluimos então que a continuidade de f implica existência de solução do PVI, mas o facto de f não ser de classe C^1 numa vizinhança de $(0, 0)$ abre a possibilidade de que a unicidade de solução do PVI possa falhar.

4. Seja $z(t) \geq 0$ é uma função real contínua tal que

$$z(t) \leq C + k \int_0^t z(s) ds, \quad (1)$$

para $t \geq 0$, onde C e k são constantes reais positivas. Prove a seguinte desigualdade:

$$z(t) \leq Ce^{kt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta proposição é uma versão simples da conhecida *desigualdade de Gronwall*, sendo muito usada na teoria qualitativa das equações diferenciais.

Resolução

Considere-se a função v definida em $[0, +\infty[$ pelo segundo membro de (1):

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} C + k \int_0^t z(s) ds$$

Note que, por hipótese, $z(t) \leq v(t)$. Pelo teorema fundamental do cálculo, v é de classe C^1 e a sua derivada é dada por:

$$v'(t) = kz(t) \leq kv(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Esta desigualdade é equivalente a:

$$v'(t) - kv(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-kt}v'(t) - ke^{-kt}v(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-kt}v(t)) \leq 0.$$

Isto significa que a função $e^{kt}v(t)$ é decrescente em $[0, \infty[$; em particular, para qualquer $t \geq 0$,

$$e^{-kt}v(t) \leq v(0) = C.$$

Conclui-se então que $v(t) \leq Ce^{kt}$, pelo que:

$$z(t) \leq v(t) = Ce^{kt} \quad \text{para qualquer } t \geq 0.$$

5. Dados dois números reais, b_0 e b_1 , arbitrários, considere os problemas de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_0$$

e

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = b_1$$

e as respectivas soluções:

$$y_0(t) \quad \text{e} \quad y_1(t).$$

Suponha também que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é limitada em $\mathbb{R}^2$.

Determine uma função $\varphi(t)$ tal que

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| \varphi(t) \quad (2)$$

para todo o $t \geq 0$. Esta proposição mostra a *dependência contínua* das soluções do PVI da condição inicial.

Sugestão: Utilize a desigualdade de Gronwall (veja o problema anterior).

Resolução:

Dado que $y_0(t)$ é solução do primeiro PVI então

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds$$

e analogamente, sendo $y_1(t)$ solução do segundo PVI,

$$y_1(t) = b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds$$

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| b_1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds - b_0 - \int_0^t f(s, y_0(s)) ds \right| \\ &\leq |b_1 - b_0| + \int_0^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \end{aligned}$$

Visto $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$ em $\mathbb{R}^2$, para certo $K > 0$, então pelo teorema de Lagrange existe $c = c(s)$ (no intervalo de extremos $y_1(s)$ e $y_0(s)$) tal que:

$$|f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, c) \right| |y_1(s) - y_0(s)| \leq K |y_1(s) - y_0(s)| \quad (3)$$

A desigualdade (3) designa-se por **condição de Lipshitz** relativa a y ; K diz-se a **constante de Lipshitz** de f . Desta forma,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| + K \int_0^t |y_1(s) - y_0(s)| ds$$

onde K é a constante de Lipschitz de f . Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = |b_1 - b_0| > 0$ e $z(t) = |y_1(t) - y_0(t)| \geq 0$:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |b_1 - b_0| e^{Kt}.$$

Podemos assim tomar $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{Kt}$ em (2).