

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 3

Teorema de Stokes

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$$

e a superfície S , constituída pela parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, considerando a normal unitária em cada ponto de S , $\vec{\nu}$, com terceira componente positiva. Calcule o trabalho de F ao longo do bordo de S (com sentido compatível com a orientação de S) utilizando:

(a) A definição de trabalho de F ao longo de um caminho.

(b) O teorema de Stokes.

Resolução:

(a) Vamos calcular o trabalho de F ao longo do bordo de S (que é um integral de linha de 2º tipo). O bordo de S , ∂S , é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$; para ser compatível com $\vec{\nu}$, deve ter o sentido positivo quando vista de cima. A curva ∂S pode então parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, pelo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi. \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} dS$$

sendo C o bordo de S com orientação compatível com a escolha de $\vec{\nu}$.

Vamos então calcular o integral de superfície. S pode ser parametrizada por $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ no domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Assim

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

Dado que a terceira componente deste vector é positiva (está de acordo com a indicação dada no enunciado) vamos usar este vector como a normal, no cálculo do fluxo de $\text{rot } F$ através de S . Por outro lado

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \iint_D \operatorname{rot} F(g(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D (0, 0, 1 - 2y) \cdot (2x, 2y, 1) dA = \iint_D (1 - 2y) dA\end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho \sin \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - 2\rho^2 \sin \theta) \, d\theta \, d\rho = \int_0^1 2\pi \rho \, d\rho = \pi\end{aligned}$$

2. Usando o teorema de Stokes, calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS$$

nos casos que se seguem.

- (a) S o hemisfério superior (isto é, $z > 0$) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x, yx^3).$$

- (b) S é a parte do plano $x + z = 1$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, em que a normal $\vec{\nu}$ tem terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x, -z, y).$$

- (c) S é formada pelo topo e pelos quatro lados (não inclui a base) do cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, em que $\vec{\nu}$ é a normal unitária exterior ao cubo e

$$F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$$

Resolução:

- (a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

sendo $\gamma = \partial S$ o bordo de S , orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho γ é a interseção da esfera com o plano $z = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$ percorrida em sentido directo (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo $F(x, y, z) = (y, -x, yx^3)$, resulta pois que:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
 &= \oint_{\gamma} (y, -x, yx^3) \cdot (dx, dy, dz) \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, -2 \cos t, 16 \sin t \cos^3 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t - 4 \cos^2 t) \, dt = -8\pi
 \end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de S , calculamos a intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Projectando ∂S no plano xy , obtém-se a circunferência $x(\theta) = \cos \theta$, $y(\theta) = \sin \theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Da equação do plano (que contém S e ∂S) $z = 1 - x$, pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \\ z(\theta) = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [0, 2\pi].$$

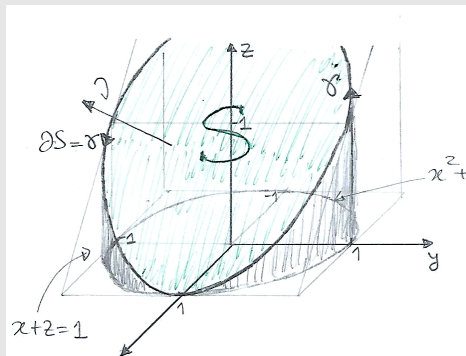


Figura 1: S é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 < 1$ com o plano $x + z = 1$ e $\partial S = \gamma$ é uma elipse.

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1 - \cos \theta), \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Note que S é orientável e o seu bordo, γ , tem sentido compatível com a normal dada. Além disso,

$F(x, y, z) = (x, -z, y)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \cos \theta - 1, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta) \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta + \sin^2 \theta) \, d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta}_0 + \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

(c) A superfície S é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano $z = -1$. O seu bordo, ∂S , é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas no plano $z = -1$, sendo percorridas no sentido indicado na figura abaixo (e que é compatível com a orientação de S).

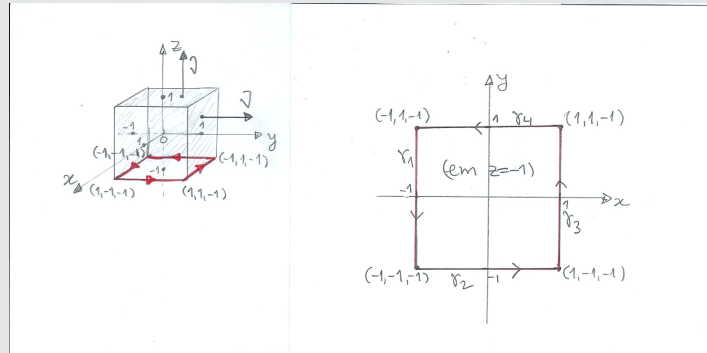


Figura 2: S e o bordo de S .

sendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ o bordo de S orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma, γ é a concatenação dos segmentos de recta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(t) &= (-1, -t, -1) & \text{com } t \in [-1, 1]; \\
 \gamma_2(t) &= (t, -1, -1) & \text{com } t \in [-1, 1]; \\
 \gamma_3(t) &= (1, t, -1) & \text{com } t \in [-1, 1]; \\
 \gamma_4(t) &= (-t, 1, -1) & \text{com } t \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

Seja $F(x, y, z) = (xyz, xy, x^2yz)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S uma superfície orientável cujo bordo é

uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot d\gamma \\
 &= \int_{-1}^1 (-t, t, t) \cdot (0, -1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, t^2) \cdot (1, 0, 0) \, dt \\
 &\quad + \int_{-1}^1 (-t, t, -t) \cdot (0, 1, 0) \, dt + \int_{-1}^1 (t, -t, -t^2) \cdot (-1, 0, 0) \, dt \\
 &= \int_{-1}^1 \underbrace{(-t + t + t - t)}_0 \, dt = 0
 \end{aligned}$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS$ num integral de linha (trabalho de F ao longo de um caminho) e calcule-o, sendo:

(a) S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $y \geq 0$, $\vec{\nu}$ a normal com segunda componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, x, x^2)$$

(b) S a superfície

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\},$$

$\vec{\nu}$ a normal com componente em x positiva e

$$F(x, y, z) = (0, x, 0)$$

Resolução:

(a) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que ∂S é o bordo da superfície S orientado de forma compatível com a escolha da normal. Neste caso, ∂S é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 0$, ou seja, é a curva $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, com o sentido directo quando vista do ponto $(0, 2, 0)$.

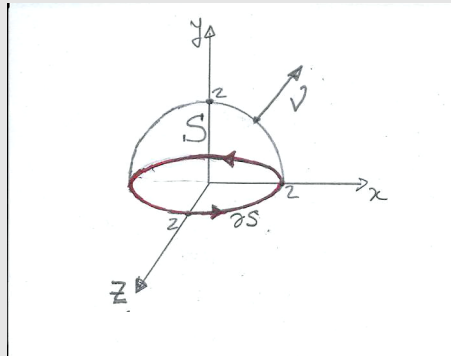


Figura 3: S e o bordo de S .

Assim (ver figura) uma parametrização de ∂S é

$$\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sendo $F(x, y, z) = (y, x, x^2)$, temos então:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos \theta, 4 \cos^2 \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 0, -2 \cos \theta) \, d\theta \\ &= -8 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dr$$

em que C é o bordo da superfície S orientada de forma compatível com a escolha da normal. S é a parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com $x > 0$, $y > 0$ e $0 < z < 1$:

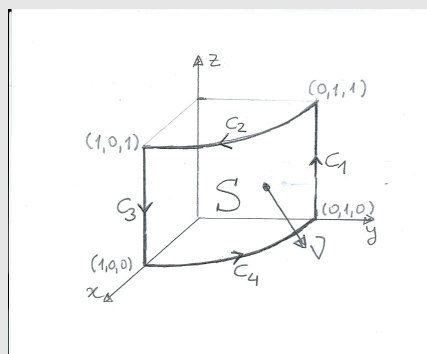


Figura 4: S e o bordo de S .

Neste caso, o bordo de S é uma curva seccionalmente regular constituída por 4 caminhos regulares,

para os quais vamos usar as parametrizações:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= (0, 1, z), & z \in [0, 1] & \quad (\text{de } C_1); \\ g_2(t) &= (\cos t, \sin t, 1), & t \in [0, \frac{\pi}{2}] & \quad (\text{de } -C_2); \\ g_3(z) &= (1, 0, z), & z \in [0, 1] & \quad (\text{de } -C_3); \\ g_4(t) &= (\cos t, \sin t, 0), & t \in [0, \frac{\pi}{2}] & \quad (\text{de } C_4). \end{aligned}$$

Para o campo vectorial $F(x, y, z) = (0, x, 0)$, temos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_{\partial S} x \, dy$$

Desta forma, e calculando os integrais de linha de F ao longo dos caminhos C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, que verificam $\partial S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} x \, dy &= \int_0^1 0 \, dz = 0 \\ \int_{C_3} x \, dy &= - \int_0^1 0 \, dz = 0 \\ \int_{C_2} x \, dy &= - \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' \, dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ \int_{C_4} x \, dy &= \int_0^{\pi/2} \cos t (\sin t)' \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = - \int_{C_2} x \, dy \end{aligned}$$

Em conclusão, e tendo em conta que os integrais ao longo de C_2 e C_4 cancelam:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS = \sum_{k=1}^4 \oint_{C_k} F \cdot d\gamma = \sum_{k=1}^4 \int_{C_i} x \, dy = 0.$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$ onde C é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(5, 5, 5)$ e

$$F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2).$$

Resolução:

Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{\nu} \, dS$$

sendo S uma superfície cujas bordas são C e $\vec{\nu}$ a normal a S compatível com o sentido indicado para C . Sendo que um vector normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é $(1, 1, 1)$, a equação

deste plano é

$$(x-1, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com g está definida na projecção do triângulo sobre o plano xy :

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \right\}$$

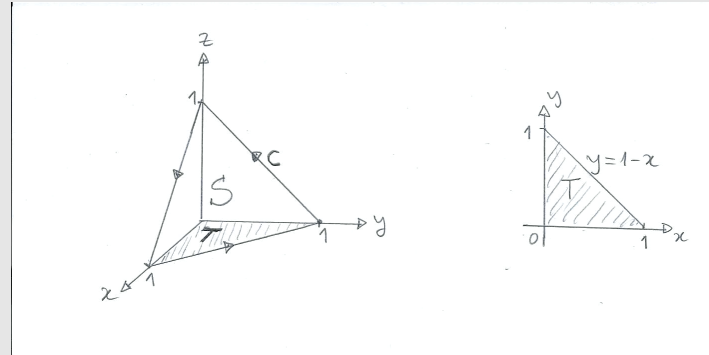


Figura 5: A curva C , uma superfície plana, S , cujo bordo é C , e o domínio de g , T .

A orientação associada a esta parametrização é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1),$$

sendo compatível com o sentido de C ; note que em caso contrário bastaria tomar $-\vec{n}$ no lugar de $\vec{n}$, no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y^2 & y + z^2 & z + x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y) = -2(z, x, y)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_T -2(1 - x - y, x, y) \cdot (1, 1, 1) \, dA \\ &= -2 \iint_T \underbrace{(1 - x - y + x + y)}_1 \, dA \\ &= -2 \iint_T dA = -2 \text{Vol}_2(T) = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

5. Seja S a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2) \quad \text{com } (u, v) \in B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, 0, x + y)$$

através de S na direção da normal com terceira componente positiva, utilizando

- (a) a definição de fluxo;
- (b) o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) O fluxo do rotacional do campo vectorial F é o integral $\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$. Temos que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x + y \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

Por outro lado, uma normal à superfície (com terceira componente positiva) é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Assim sendo,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS = \iint_S (1, -1, -1) \cdot (2u, 2v, 1) \, dS = \iint_B (2u - 2v - 1) \, du \, dv$$

Efectuando a mudança para coordenadas polares $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$, e como B é dado por $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{\nu} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta - 1) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \left(2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_0 + 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta}_0 - \rho \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 (-2\pi\rho) \, d\rho = -\pi\rho^2 \Big|_0^1 = -\pi. \end{aligned}$$

(b) Para aplicar o teorema de Stokes necessitamos de uma parametrização do bordo de S cujo sentido é compatível com a orientação da superfície. Sendo ∂B a circunferência $u^2 + v^2 = 1$, tomando $u(t) = \cos t$ e $v(t) = \sin t$, ou seja,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

e tendo em conta que $\vec{n}$ — a orientação de S segundo a qual se pretende calcular o fluxo — coincide com a normal induzida pela parametrização, então o bordo de S é o caminho

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= g \circ \gamma(t) = g(\cos t, \sin t) \\ &= (\cos t, \sin t, 2 - \cos^2 t - \sin^2 t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = -\pi\end{aligned}$$

6. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z, 0 < z < 1\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G através de S , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

- (a) o teorema de Stokes;
- (b) o teorema da divergência.

Resolução:

(a) A superfície S é dada por $z = x^2 + y^2 - 1$, com

$$0 < z < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x^2 + y^2 - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < x^2 + y^2 < 2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1),$$

com g definida na coroa circular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}.$$

Um vector normal a S é

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

Como necessitamos da normal a S com terceira componente negativa, tomamos $-\vec{n}$. Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de S que seja compatível com esta orientação precisamos que a fronteira de ∂A , que designamos por γ , seja percorrida no sentido inverso (ver figura).

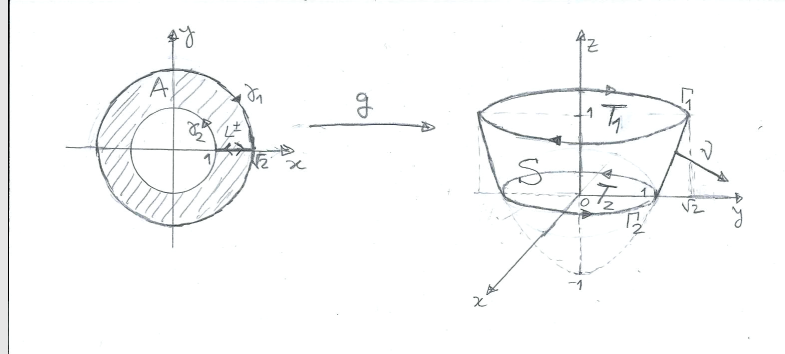


Figura 6: Determinação do bordo da superfície S .

Considerando

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t), & t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Resulta então que o bordo de S é $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t) &= g \circ \gamma_1(t) = (\sqrt{2} \cos t, -\sqrt{2} \sin t, 1), & t \in [0, 2\pi], \\ \Gamma_2(t) &= g \circ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), & t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que $G = 0$ em Γ_2 , temos:

$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS &= \int_{\Gamma} G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}}_0 \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 1) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi.\end{aligned}$$

(b) Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície S os círculos

$$\begin{aligned}T_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\} \\ T_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

Em linguagem informal, podemos dizer que T_1 é a “tampa” do sólido D e T_2 o seu “fundo” (ver figura da alínea (a)), onde

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z \text{ e } 0 < z < 1 \right\}.$$

Assim sendo, $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$. Sendo

$$\text{rot } G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z) :$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vectorial $\text{rot } G$, por forma a verificarmos que o fluxo deste campo através de ∂D é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\text{rot } G)}_0 \, dV = 0.$$

Por outro lado, como $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$:

$$\iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial D} \text{rot } G \cdot \nu \, dS = 0.$$

Utilizando

$$g_1(x, y) = (x, y, 1) \quad \text{definida em } D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\},$$

$$g_2(x, y) = (x, y, 0) \quad \text{definida em } D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\},$$

como parametrizações de T_1 e T_2 , respectivamente, resulta assim que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } G \cdot \nu \, dS &= - \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot \nu \, dS - \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot \nu \, dS \\ &= - \iint_{D_1} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) \, dA - \iint_{D_2} \underbrace{(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_0 \, dA \\ &= 2 \iint_{D_1} dA = 2\pi (\sqrt{2})^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

7. Seja C um caminho fechado e simples que pertence ao plano $x + y + z = 1$ e é percorrido no sentido directo quando visto do ponto $(0, 0, 10)$. Mostre que o integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

depende apenas da área da região do plano $x + y + z = 1$ delimitada por C .

Resolução:

Seja S a região interior à curva C no plano

$$x + y + z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - x - y.$$

Vamos parametrizar S por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in P \subset \mathbb{R}^2,$$

onde P obtém-se da projecção de S no plano coordenado $z = 0$, ou seja,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1 - x - y) \in S\}.$$

A orientação associada a esta parametrização,

$$\vec{n} = \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad \nu = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

é compatível com o sentido prescrito para C . Por outro lado, considerando o campo dado, $F(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = (3, 1, -2).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } F \cdot \nu dS \\ &= \iint_S (3, 1, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}} dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S). \end{aligned}$$

Comentário: note que se a curva fosse percorrida no sentido contrário ao que foi prescrito, o valor do integral seria $-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(S) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{Vol}_2(S)$. O integral depende apenas do sentido da curva e da área da região do plano delimitada por C ; para além desta dependência, o integral não é função nem da “forma” da curva nem da sua posição no plano.

8. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^\perp M$ para todo o $x \in M$). Mostre que $\text{rot } H$ é um campo vectorial tangente a M em qualquer ponto $p \in M$.

Resolução:

Se $\text{rot } H$ não fosse tangente a M em algum ponto $p \in M$ então teríamos

$$\text{rot } H(p) \cdot \nu(p) > 0$$

para uma certa normal unitária $\nu(\mathbf{x})$ a M , localmente definida. Uma vez que H é de classe C^1 , e portanto $\text{rot } H$ é uma função contínua, existiria um conjunto aberto $U \ni p$ tal que $\text{rot } H(x) \cdot \nu(\mathbf{x}) > 0$ para $x \in U \cap M$. Tomando um caminho simples e fechado γ em $U \cap M$, com sentido compatível com ν , teríamos então, pelo teorema de Stokes

$$\int_\gamma H \cdot d\gamma = \int_S \text{rot } H \cdot \nu dS > 0,$$

onde $S \subset U \cap M$ é a região de M com bordo γ .

Por outro lado, e uma vez que H é ortogonal a M , temos

$$\oint_{\gamma} H \cdot d\gamma = \int_a^b H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

pois $\gamma'(t)$ é sempre um vector tangente a M para qualquer parametrização $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de um caminho em M . Tendo deduzido uma contradição, concluímos que $\text{rot } H$ é necessariamente tangente à superfície M em todos os pontos da mesma.