

Cálculo Diferencial e Integral III

2026/2027

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 2 Operadores Diferenciais, Fluxo e Teorema da Divergência

1. Seja f um campo escalar e F um campo vectorial ambos de classe C^2 . Diga se cada expressão tem significado e, nesse caso, diga se é um campo vectorial ou escalar.

- (a) $\text{div}(\nabla f)$
- (b) $\text{rot}(\text{rot } F)$
- (c) $\nabla f \times (\text{div } F)$

Resolução:

- (a) Sendo f um campo escalar de classe C^2 , o gradiente de f está bem definido

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

e representa um campo vectorial de classe C^1 . Sendo assim $\text{div}(\text{grad } f)$ está bem definido

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

e é um campo escalar que, como vimos acima, é igual ao Laplaciano de f .

- (b) Sendo F um campo vectorial de classe C^2 , $\text{rot } F$ está bem definido

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

e representa um campo vectorial. Sendo assim $\text{rot}(\text{rot } F)$ está bem definido e é também um campo vectorial.

- (c) Sendo f um campo escalar de classe C^2 , o gradiente de f está bem definido e representa um campo vectorial. Por outro lado, sendo F um campo vectorial $\text{div } F$ está bem definido e representa um campo escalar. Atendendo a que o produto externo é uma operação definida entre dois vectores, $\text{grad } f \times \text{div } F$ não está definido.

2. Determine o rotacional e a divergência do campo vectorial definido por

(a) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$

(b) $F(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2y)$

Resolução:

(a) Seja $r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Então

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Identicamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Desta forma, e como $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, tem-se que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{z}{r^2} + \frac{y}{r^2} \frac{z}{r}, \frac{z}{r^2} - \frac{x}{r^2} \frac{z}{r}, -\frac{y}{r^2} + \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} \right) = (0, 0, 0)$$

e

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} \\ &= \frac{3r - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

(b) Tem-se que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = (-x^2, 3xy, -xz)$$

e

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) = yz$$

3. Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e F, G foram campos vectoriais, então $fF, F \cdot G$ e $F \times G$ são definidos como usual.

(a) $\text{div}(F + G) = \text{div } F + \text{div } G.$

- (b) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$
 (c) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$
 (d) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Resolução:

Suponhamos que $F = (P_1, Q_1, R_1)$ e $G = (P_2, Q_2, R_2)$.

(a) Temos que $F + G = (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, R_1 + R_2)$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F + G) &= \frac{\partial(P_1 + P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \\ &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G \end{aligned}$$

(b) Supondo $F = (P, Q, R)$ temos $fF = (fP, fQ, fR)$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fF) &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\ &= f \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} P + f \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} Q + f \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} R \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f \end{aligned}$$

(c) Temos que

$$F \times G = (Q_1 R_2 - Q_2 R_1, P_2 R_1 - P_1 R_2, P_1 Q_2 - Q_1 R_2)$$

Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F \times G) &= \frac{\partial(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2 R_1 - P_1 R_2)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)}{\partial z} \\ &= Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + R_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} \\ &\quad - R_2 \frac{\partial P_1}{\partial y} - P_1 \frac{\partial R_2}{\partial y} + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} + Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial z} - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z} - Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial z} \\ &= P_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \\ &\quad + P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \\ &= -F \cdot \operatorname{rot} G + G \cdot \operatorname{rot} F \end{aligned}$$

(d) Da alínea anterior, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot \operatorname{rot}(\nabla f) - \nabla f \cdot \operatorname{rot}(\nabla g)$$

Se f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ então $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot 0 - \nabla f \cdot 0 = 0$$

4. Verifique as seguintes igualdades:

(a) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

(b) $\operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$ sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

Resolução:

(a) Sendo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r}\end{aligned}$$

(b) Tem-se que (utilizando os cálculos das derivadas parciais de r do problema 2(a)):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(r\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr) \\ &= r + x \frac{x}{r} + r + y \frac{y}{r} + r + z \frac{z}{r} \\ &= 3r + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = 4r\end{aligned}$$

5. Mostre que $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta f = 0$, excepto no ponto $(0, 0)$.

Resolução:

Para mostrar que f verifica a equação de Laplace, há que verificar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Desta forma, $\Delta f = 0$.

6. Mostre que qualquer campo vectorial da forma

$$F(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z)),$$

em que f , g e h são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, é irrotacional.

Resolução:

Basta mostrar que $\text{rot } F = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} h(z) - \frac{\partial}{\partial z} g(y), \frac{\partial}{\partial z} f(x) - \frac{\partial}{\partial x} h(z), \frac{\partial}{\partial x} g(y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right) \\ &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

como se queria mostrar.

7. Existe um campo vectorial G em $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } G = (x \sin y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

Resolução:

Vamos supor que existe efectivamente um campo vectorial G tal que $\text{rot } G = F(x, y, z) = (x \sin y, \cos y, z - xy)$. Comecemos por calcular $\text{div } F$. Temos que

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x} (x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y} (\cos y) + \frac{\partial}{\partial z} (z - xy) = \sin y - \sin y + 1 = 1$$

Sabemos que se G é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\text{div}(\text{rot } G) = 0$. Mas como

$$\text{div } F = \text{div}(\text{rot } G) \neq 0,$$

concluimos (por redução ao absurdo) que não pode existir G tal que $F = \text{rot } G$ em $\mathbb{R}^3$.

8. Mostre que qualquer campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, da forma

$$F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$

é incompressível.

Resolução:

Basta mostrar que $\operatorname{div} F = 0$ para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f(y, z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial z} = 0,$$

como se queria mostrar.

9. Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ orientada pela normal com terceira componente positiva.

Resolução:

Trata-se de uma porção do parabolóide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ de vértice $(0, 0, 1)$ situada acima do plano $z = 0$. Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$$

com $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, dado que a intersecção de $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vector normal a S necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Atendendo à orientação dada, devemos usar este vector $\vec{N}$ e não o seu simétrico $-\vec{N} = (-2u, -2v, -1)$. O fluxo do campo de F através de S é então dado por

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iint_D (u, v, 1 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv = \iint_D (u^2 + v^2 + 1) \, du \, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é ρ) de onde resulta que:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 1) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

10. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (0, 0, z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada segundo a normal exterior a S .

Resolução:

Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta, \phi) = (3 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 3 \cos \phi)$$

para $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\phi \in]0, \pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3 \sin \phi \sin \theta, 3 \sin \phi \cos \theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3 \cos \phi \cos \theta, 3 \cos \phi \sin \theta, -3 \sin \phi)$$

Como tal, a expressão do vector normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 \sin \phi \sin \theta & 3 \sin \phi \cos \theta & 0 \\ 3 \cos \phi \cos \theta & 3 \cos \phi \sin \theta & -3 \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= (-9 \sin^2 \phi \cos \theta, -9 \sin \theta \sin^2 \phi, -9 \cos \phi \sin \phi) \end{aligned}$$

Atendendo à orientação dada, há que considerar o vector normal

$$-\vec{N} = (9 \sin^2 \phi \cos \theta, 9 \sin \theta \sin^2 \phi, 9 \cos \phi \sin \phi)$$

que "aponta para cima" no hemisfério norte (onde $\phi \in]0, \pi/2[$) e aponta "para baixo" no hemisfério sul (onde $\phi \in]\pi/2, \pi[$). O fluxo do campo F ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iint_D (0, 0, z(\theta, \phi)) \cdot (-\vec{N}(\theta, \phi)) \, d\theta \, d\phi \\ &= \iint_D (3 \cos \phi) (9 \cos \phi \sin \phi) \, d\theta \, d\phi \\ &= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 27 \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{-\cos^3 \phi}{3} \right|_0^\pi = 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \\ &= 36\pi. \end{aligned}$$

11. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, xy, z)$ e V é o sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$. Calcule o fluxo de F através da fronteira de V no sentido da normal exterior a V usando:

- (a) A definição de fluxo.
(b) O teorema da divergência.

Resolução:

- (a) A fronteira de V é $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 é o parabolóide, $z = 4 - x^2 - y^2$, com $z > 0$, e S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano $z = 0$. Assim, o fluxo de F através de S é dado por:

$$\iint_S F \cdot \vec{\nu} dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{\nu}_2 dS$$

É fácil de entender que $\vec{\nu}_2 = (0, 0, -1)$ pelo que $F \cdot \vec{\nu}_2 = z$ e dado que em S_2 se tem $z = 0$ obtemos

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{\nu}_2 dS = 0$$

Por outro lado, S_1 pode ser parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 4\}.$$

A normal a S_1 é

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1),$$

e dado que a normal exterior a S_1 tem terceira componente positiva, usaremos $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ para o cálculo do integral. Então

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS &= \iint_D (u^2, uv, 4 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv \\ &= \iint_D (2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2) du dv \end{aligned}$$

Fazendo a transformação para coordenadas polares ($u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$) obtém-se

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 4 - r^2) r d\theta dr = 8\pi$$

e, como tal, o fluxo pedido é 8π .

Para o cálculo expedito do integral anterior, note que se f é uma função periódica de média zero então

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

sendo $b - a$ o período de f . Como exemplos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0.$$

(b) Pelo teorema da divergência

$$\iint_S F \cdot \vec{\nu} dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV$$

em que V é o sólido dado, S a sua fronteira e $\vec{\nu}$ a normal unitária exterior a S . Dado que

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2 \right\}$$

e que $\operatorname{div} F = 3x + 1$, tem-se que

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (3x + 1) dz dx dy = \iint_D (3x + 1)(4 - x^2 - y^2) dA$$

sendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Mudando para coordenadas polares, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, temos que

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3\rho \cos \theta + 1)(4 - \rho^2) \rho d\theta d\rho = 8\pi.$$

12. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S F \cdot \nu dS$$

em que $F(x, y, z) = (\sin(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$ e S é a superfície do paralelepípedo $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ e $1 \leq z \leq 4$.

Resolução:

Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

sendo E o paralelepípedo limitado pelos planos $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ e $z = 4$. Temos então que os limites de integração serão

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 4.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 4x) = \pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_{-1}^2 \int_0^1 \int_1^4 (\pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \frac{135}{2}\end{aligned}$$

13. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução:

A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tem um vector normal num ponto (x, y, z) da forma (x, y, z) (o qual aponta para “fora”). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = (2, 2, z) \cdot \nu,$$

pois a normal unitária em cada ponto de ∂B é

$$\nu = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\|\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\|} = \frac{1}{2}(2x, 2y, 2z) = (x, y, z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo $(2, 2, z)$ através de ∂B . Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}\iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS &= \iint_S (2, 2, z) \cdot (x, y, z) \, dS \\ &= \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iiint_B dV = \operatorname{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

14. Use o teorema da divergência para determinar o fluxo do campo $F(x, y, z)$ através da superfície S na direcção da normal ν indicada, sendo:

- (a) S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos $x + 2z = 4$ e $y = 2$,

$$F(x, y, z) = (xyz, yz, z^2)$$

e ν com terceira componente positiva

- (b) S é o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $0 < z < 1$, ν com terceira componente não positiva e

$$F(x, y, z) = (x^2y, -xy^2, 1)$$

Resolução:

- (a) Pretendemos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

em que S é a superfície dada. Dado que S delimita um sólido, V , por aplicação do teorema da divergência tem-se que

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

sendo

$$\operatorname{div} F = (3 + y)z$$

e

$$V = \{(x, y, z) : 0 < y < 2, 0 < z < 2, 0 < x < 4 - 2z\}$$

Então

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{4-2z} (3 + y)z \, dx \, dy \, dz = \frac{64}{3}$$

- (b) Queremos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

Observe que S não é uma superfície fechada (isto é, S não é a fronteira de um sólido V). Para que possamos utilizar o teorema da divergência, vamos considerar a superfície S_1 constituída pelo círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ em $z = 1$. Seja agora $\Sigma = S \cup S_1$ (ou seja o parabolóide “tapado” com o círculo). Como Σ é uma superfície fechada, podemos agora usar o teorema da divergência escolhendo a normal exterior, ν , em Σ (ou seja, que aponte “para fora”). Seja ν_1 a normal a S_1 (que aponta para cima). Temos

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

pelo que,

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS - \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

Pelo teorema da divergência,

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS = \iiint_E (2xy - 2xy + 0) \, dV = 0$$

em que E é o sólido que possui Σ como fronteira. Como consequência

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = - \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

Para determinar $\iint_{S_1} F \cdot \nu_1 dS$, basta notar que a normal unitária exterior ao sólido nos pontos de S_1 é $\nu_1 = (0, 0, 1)$, pelo que $F \cdot \nu = F_3 = 1$. Então, com $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$, obtemos

$$\iint_{S_1} F \cdot \nu_1 dS = \iint_D dA = \text{Vol}_2(D) = \pi$$

donde concluímos que

$$\iint_S F \cdot \nu dS = -\pi$$

15. Seja S a parte do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$, com $z > 1$. Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

através de S na direção da normal a S com terceira componente positiva. Note que F é da forma fG , onde f é um campo escalar e G um campo vectorial.

Resolução:

Vamos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu dS$$

usando o teorema da divergência. Mais uma vez se constata que S não é uma superfície fechada e, assim, para que se possa usar o teorema é necessário “tapar” inferiormente S . Considere-se

$$\Sigma = S \cup T$$

em que T é a superfície $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$. Então Σ é uma superfície fechada, sendo V o sólido limitado por Σ e ν a normal exterior a Σ , tem-se que

$$\iiint_{\Sigma} F \cdot \nu dS = \iiint_V \text{div } F dV$$

Dado que

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu dS = \iint_S F \cdot \nu dS + \iint_T F \cdot \nu dS$$

obtem-se

$$\iiint_V \text{div } F dV = \iint_S F \cdot \nu dS + \iint_T F \cdot \nu dS$$

e, como tal, o integral pedido é

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_V \text{div } F dV - \iint_T F \cdot \nu dS$$

Vamos calcular estes dois integrais. Por um lado, fazendo $r = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, temos $F = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$ e

$$\text{div } F = 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

e assim

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = 0$$

Por outro lado, em T tem-se $\nu = (0, 0, -1)$ e assim $F \cdot \nu = -r^{-3}z$. Podemos parametrizar T por $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1)$, com $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$. Então

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2 + 1)^{-3/2} \rho \, d\theta \, d\rho = \pi (\sqrt{2} - 2)$$

e finalmente

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \pi (2 - \sqrt{2})$$

16. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$, onde $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ sem calcular $\operatorname{div} G$ directamente.

Resolução:

Estando G definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, consideremos o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

Note-se que a fronteira de V é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e R , respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a V são os vectores $-(x, y, z)$ e $\frac{1}{R}(x, y, z)$. Aplicando o teorema de Gauss em V obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} G \, dV = \iint_{\Sigma} G \cdot \nu \, dS$$

em que Σ é constituída pela esfera de raio 1, S_1 e pela esfera de raio R , S_R . Dado que $\operatorname{div} G = 0$

$$\iint_{\Sigma} G \cdot \nu \, dS = 0$$

ou seja

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS + \iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS = 0$$

Fazemos o cálculo do segundo integral, dado que para o primeiro basta fazer $R = 1$, no resultado que vamos obter (e trocar o sinal, dado que a normal a S_1 aponta em sentido contrário à de S_R). Sendo $S_R = \{(x, y, z) : \|(x, y, z)\| = R\}$, tem-se que

$$G(x, y, z) = \phi(R)(x, y, z)$$

e assim

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS &= \iint_{S_R} \phi(R)(x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) \, dS \\
 &= \frac{\phi(R)}{R} \iint_{S_R} \|(x, y, z)\|^2 \, ds \\
 &= R \phi(R) \text{Vol}_2(S_R) \\
 &= 4\pi \phi(R) R^3
 \end{aligned}$$

Fazendo $R = 1$ e trocando o sinal, obtemos

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS = -4\pi \phi(1)$$

Sabendo que $\phi(1) = 1$, tem-se

$$-4\pi + 4\pi \phi(R) R^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(R) = \frac{1}{R^3}$$

17. Seja f um campo escalar de classe C^1 e g um campo escalar de classe C^2 ambos definidos num conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$. Demonstre a seguinte igualdade, (designada *primeira fórmula de Green*), onde E é um sólido simples cujo fecho está contido em A e S a sua fronteira:

$$\iint_S f \nabla g \cdot \nu \, dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$$

Resolução:

Note que, por aplicação do teorema da divergência

$$\iint_S (f \nabla g) \cdot \nu \, dS = \iiint_E \text{div} (f \nabla g) \, dV$$

Como

$$\begin{aligned}
 \text{div} (f \nabla g) &= \text{div} \left(f \frac{\partial g}{\partial x}, f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
 &= \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g
 \end{aligned}$$

o resultado fica, assim, demonstrado.