

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 1 Superfícies e Integrais de Superfície

1. Determine se os pontos $P(7, 10, 4)$ e $Q(5, 22, 5)$ pertencem à superfície dada por

$$r(u, v) = (2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v).$$

Resolução:

Para mostrar se um ponto P_0 pertence à superfície há que determinar (se existir) um par (u_0, v_0) para o qual $P_0 = r(u_0, v_0)$. Assim para verificar se o ponto $P(7, 10, 4)$ pertence à superfície há que resolver

$$r(u, v) = (7, 10, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 3v = 7 \\ 1 + 5u - v = 10 \\ 2 + u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \\ 5 = 4 \end{cases}$$

que é claramente um sistema impossível. Conclui-se que o ponto P **não** pertence à superfície. Analogamente, para verificar se o ponto Q pertence à superfície, há que resolver o sistema

$$r(u, v) = (5, 22, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 1 + 5u - v = 22 \\ 2 + u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = -1 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Tem-se então que $r(4, -1) = (5, 22, 5)$; conclui-se que o ponto Q pertence à superfície.

2. Determine uma representação paramétrica para as superfícies definidas como se segue.

- (a) A superfície definida por $x + 2y + 3z = 4$, x, y e $z \in \mathbb{R}$.
- (b) O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vectores $(1, 1, -1)$ e $(1, -1, 1)$.
- (c) A esfera de centro na origem e de raio 4.
- (d) A superfície S caracterizada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z \geq 0$. (Apresente duas parametrizações distintas desta superfície S).
- (e) A superfície $z = 4 - y^2$ cortada pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$.
- (f) A face do cilindro $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ entre os planos $y = 0$ e $y = 3$.
- (g) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ situada entre os planos $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$.
- (h) A superfície de revolução, obtida por uma rotação de um ângulo de 2π radianos em torno do eixo Oy , da curva γ parametrizada por

$$r(t) = (f(t), g(t), 0) \quad , \quad t \in [a, b]$$

onde $f(t) > 0$ para qualquer $t \in [a, b]$.

Resolução:

(a) Trata-se do plano de equação $x + 2y + 3z = 4$. Dado que $x = 4 - 2y - 3z$ (ou seja, os pontos da superfície são o gráfico de uma função $x = g(y, z)$) tomamos y e z como parâmetros e consideramos

$$\begin{cases} x = 4 - 2u - 3v \\ y = u \\ z = v \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

como uma parametrização da superfície S . Também podemos considerar como parametrizações de S as funções vectoriais

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{4-u-3v}{2} \\ z = v \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e z como parâmetros, e

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{4-u-2v}{3} \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e y como parâmetros.

Outra parametrização surge naturalmente da equação vectorial de um plano. Atendendo aos vectores directores do plano, os quais podem ser facilmente obtidos a partir de três pontos do plano que não sejam colineares, é possível obter a equação vectorial do plano. De facto, consideremos os seguintes pontos do plano $x + 2y + 3z = 4$

$$A(-1, 1, 1) \quad , \quad B(3, -1, 1) \quad \text{e} \quad C(-4, 1, 2)$$

a que correspondem os vectores directores do plano

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, 0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 0, 1)$$

O plano $x + 2y + 3z = 4$ tem então por equação vectorial

$$(x, y, z) = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t(4, -2, 0) + s(-3, 0, 1) \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Daqui resultam as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t - 3s \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + s \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) A equação vectorial do plano é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + u(1, 1, -1) + v(1, -1, 1)$$

com u e $v \in \mathbb{R}$. Tem-se então que

$$\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = -3 - u + v \end{cases}$$

e, como tal, uma parametrização será

$$r(u, v) = (1 + u + v, 2 + u - v, -3 - u + v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(c) Trata-se da superfície S definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Utilizando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\varphi \in]0, \pi[$, vê-se que S é constituída por todos os pontos dados por (1) tais que $\rho = 4$; ou seja,

$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \sin \varphi \\ y = 4 \sin \theta \sin \varphi \\ z = 4 \cos \varphi \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Assim sendo, a parametrização pretendida é:

$$g(\theta, \varphi) = (4 \cos \theta \sin \varphi, 4 \sin \theta \sin \varphi, 4 \cos \varphi) \quad \text{para } (\theta, \varphi) \in T.$$

(d) Trata-se do hemisfério norte (a "metade superior") da superfície esférica de centro na origem, $(0, 0, 0)$, e raio 4. Como na alínea anterior, podemos considerar para S uma parametrização baseada nas coordenadas esféricas (1)

$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \sin \varphi \\ y = 4 \sin \theta \sin \varphi \\ z = 4 \cos \varphi \end{cases}$$

onde $\theta \in]0, 2\pi[$ mas $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (que nos dá os ângulos φ correspondentes apenas aos pontos do hemisfério norte da esfera).

Pode-se obter uma outra parametrização resolvendo a equação da esfera em ordem a z :

$$z = \pm \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Como $z > 0$ (hemisfério norte), a solução que nos interessa é a que corresponde ao sinal positivo. A projecção da esfera no plano xy é o disco

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\},$$

pelo que a parametrização é

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

para $(x, y) \in B$, ou seja

$$g(x, y) = \left(x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right), \quad (x, y) \in B.$$

(e) A superfície obtém-se por translação da parábola $z = 4 - y^2$ segundo a direcção do eixo dos x (faça uma figura). É então conveniente usar x como um dos parâmetros. Dado que $z = 4 - y^2$, tomamos também y como parâmetro. Assim sendo,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases}$$

onde $0 < x < 2$ implica que $0 \leq u \leq 2$. Por outro lado, sendo S cortada pelo plano $z = 0$ então $z > 0 \Leftrightarrow 4 - y^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < v < 2$. Obteve-se assim a parametrização

$$r(u, v) = (u, v, 4 - v^2) \quad , \quad 0 < u < 2 \quad , \quad -2 < v < 2.$$

(f) Tratando-se de uma superfície cilíndrica com eixo na recta $(x, y, z) = (2, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, é de todo conveniente usar as coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho \cos \theta \\ y = t \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = t \\ z = 2 \sin \theta \end{cases}$$

e uma parametrização será

$$r(t, \theta) = (2 + 2 \cos \theta, t, 2 \sin \theta) \quad , \quad 0 < t < 3 \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

(g) Neste exercício é conveniente usar coordenadas esféricas. Assim, escolhendo os ângulos dessas coordenadas para parâmetros, vamos ter

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta \\ z = \sqrt{3} \cos \varphi \end{cases}$$

ou seja, a parametrização dada por:

$$r(\theta, \varphi) = \left(\sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta, \sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta, \sqrt{3} \cos \varphi \right)$$

Sabemos que a esfera foi cortada pelos planos horizontais $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$, o que não restringe θ ; como tal, $\theta \in]0, 2\pi[$. Por outro lado, como qualquer ponto da superfície tem coordenada z no intervalo $]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[$, temos que

$$-\frac{1}{2} < \cos \varphi < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arccos \frac{1}{2} < \varphi < \pi - \arccos \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$$

Resulta então que $\varphi \in]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

(h) Cada um dos pontos de $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ descreve uma circunferência centrada num ponto do eixo Oy , e contida no plano $y = g(t)$ (que é paralelo ao plano coordenado xz); nesta rotação, a coordenada y permanece com o valor $g(t)$, enquanto (x, z) descreve uma circunferência de raio $f(t)$ centrada no ponto $(0, g(t), 0)$. Deste modo, obtém-se a superfície de revolução parametrizada por

$$r(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, g(t), f(t) \sin \theta)$$

para $a < t < b$ e $0 < \theta < 2\pi$.

3. Identifique a superfície parametrizada por:

(a) $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq h$, onde $h > 0$ é um real dado.

(b) $r(u, v) = (1, u, v)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 1$.

(c) $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ com $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$.

Resolução:

(a) Como se vê, a superfície está parametrizada à custa de coordenadas cilíndricas. Tomando isso em consideração, pode-se eliminar os parâmetros u e v como se segue:

$$x^2 + y^2 = v^2 \text{ e } z = v \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

A superfície é pois uma parte do cone com vértice no origem, geratriz $z = x$ e eixo de simetria coincidente com o eixo dos z . Olhando agora para o domínio dos parâmetros observa-se que $z = v$ é positivo e menor que h ; assim, a superfície é a face lateral do cone dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $0 \leq z \leq h$.

(b) Trata de uma porção de um plano, dado que a parametrização é uma transformação linear. Ora $y = u$ e $z = v$ significam que y e z podem tomar quaisquer valores nos intervalos indicados. Assim, a equação cartesiana da superfície é

$$x = 1$$

com $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.

(c) Conforme se constata por eliminação dos parâmetros $u = x$ e $v = y$, a função $r(u, v)$ parametriza o parabolóide de equação

$$z = x^2 + y^2, \text{ com } x^2 + y^2 < 1$$

equivalente a

$$z = x^2 + y^2 \text{ com } 0 \leq z < 1.$$

O domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ corresponde à projecção da superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z < 1$ no plano xy .

4. Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por:

(a) $x + 2y + 3z = 4$, com orientação para cima.

(b) $z = 9 - x^2 - y^2$, com orientação para baixo.

Resolução:

(a) Dada a parametrização $r(u, v) = (4 - 2u - 3v, u, v)$, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, apresentada no Exercício 2(a), temos

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-2, 1, 0) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial v} = (-3, 0, 1)$$

Como tal, a expressão geral dum vector normal a S é

$$\vec{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 3)$$

Dado que a superfície S é orientada para cima, consideramos este vector e não o seu simétrico $-\vec{N}$. A expressão geral do vector normal unitário a S é

$$\nu = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

De outra forma (bastante mais simples, por sinal), dado que a superfície é da forma

$$F(x, y, z) = 4$$

com $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$, trata-se de uma curva de nível de F e assim um vector normal pode ser dado por

$$\vec{N} = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (1, 2, 3)$$

(b) Trata-se do parabolóide de equação $z = 9 - x^2 - y^2$. Uma parametrização de S é

$$r(u, v) = (u, v, 9 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u, v) \in D$$

em que $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 9\}$ (dado que a intersecção de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$). Assim, a expressão geral do vector normal é

$$\vec{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que se pretende a superfície S orientada para baixo, há que considerar o vector $-\vec{N} = (-2u, -2v, -1)$ que "aponta para baixo". O vector normal unitário é

$$\nu = \frac{-\vec{N}}{\|-\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, -1)$$

Mais uma vez, a superfície é da forma

$$F(x, y, z) = 9$$

com $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, trata-se de uma curva de nível de F e assim o vector normal é dado por

$$\vec{N} = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 1)$$

5. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $r(u, v)$ no ponto especificado.

(a) $g(u, v) = (u^2, 2u \sin v, u \cos v)$, $(u_0, v_0) = (1, 0)$.

(b) $g(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $r(1, 1)$.

(c) $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, no ponto $r(1, 1)$

Resolução:

(a) Temos que

$$g(u, v) = (u^2, 2u \sin v, u \cos v)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u, v) = u^2 \\ y(u, v) = 2u \sin v \\ z(u, v) = u \cos v \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular os vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (2u, 2 \sin v, \cos v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 2u \cos v, -u \sin v)$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2u & 2 \sin v & \cos v \\ 0 & 2u \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = (-2u \sin^2 v - 2u \cos^2 v, 2u^2 \sin v, 4u^2 \cos v)$$

e no ponto dado $u = 1$ e $v = 0$ temos que este vector normal é $(-2, 0, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é

$$-2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0$$

Doutra forma, eliminando os parâmetros, temos que a superfície é dada por

$$x = \frac{y^2}{4} + z^2$$

ou seja, a superfície é definida pela equação

$$F(x, y, z) = 0$$

com $F(x, y, z) = x - \frac{y^2}{4} - z^2$, trata-se de uma superfície de nível de F e assim um vector normal é dado por

$$\vec{N}(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left(1, -\frac{y}{2}, -2z \right)$$

Assim uma equação do plano tangente a S no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é dada por

$$\vec{N}(1, 0, 1) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1, 0, -2) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0$$

obtendo-se assim (o mesmo resultado)

$$(x - 1) - 2(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0.$$

(b) Temos que

$$g(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u, v) = u - v \\ y(u, v) = u^2 + v^2 \\ z(u, v) = uv \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 2u, v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (-1, 2v, u)$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2u & v \\ -1 & 2v & u \end{vmatrix} = (2u^2 - 2v^2, -u - v, 2u + 2v)$$

e no ponto dado $(u, v) = (1, 1)$ temos que um vector normal é $(0, -2, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente ao ponto $r(1, 1) = (0, 2, 1)$ é

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2z = 0$$

Neste caso, é difícil obter a representação como conjunto de nível 0, pois dá algum trabalho eliminar os parâmetros em $g(u, v)$; portanto, é aconselhável esta forma de fazer o exercício.

(c) Sendo que

$$g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Os vectores tangentes são:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, 2u),$$

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, 2v).$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

No ponto dado, $(u, v) = (1, 1)$, um vector normal é $(-2, -2, 1)$. Portanto, uma equação do plano tangente ao ponto $g(1, 1) = (1, 1, 2)$ é

$$-2 \cdot (x - 1) - 2(y - 1) + (z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 2.$$

Se preferir, a equação vectorial deste plano tangente é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 2)$$

com $t, s \in \mathbb{R}$. Doutra forma, eliminando os parâmetros, temos que a superfície é dada por

$$z = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y, z) = 0$$

com $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; trata-se de uma curva de nível 0 de F e, assim, um vector normal é dado por

$$\vec{N} = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y, -1)$$

Assim, uma equação do plano tangente a S no ponto $g(1, 0) = (1, 1, 2)$ é dada por

$$\vec{N}(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2, 2, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0$$

obtendo-se assim

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y - z = 2$$

6. Calcule o integral de superfície de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4}$, sendo S a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xOy .

Resolução:

Começemos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do parabolóide com o plano $z = 0$ é $x^2 + y^2 = 9$, consideraremos a parametrização

$$g(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

em que $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Sendo assim

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_T f(x, y) \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \|(2x, 2y, 1)\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_T 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} dx dy \\ &= 2 \iint_T (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}) dx dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

em que $0 < \rho < 3$ e $0 < \theta < 2\pi$,

$$\iint_S f dS = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\rho^2 + \frac{1}{4}) \rho d\rho d\theta = 4\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{8} \right) \Big|_0^3 = \frac{171}{2} \pi$$

7. Determine a área da superfície dada por

- (a) A parte inferior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (b) A superfície $S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.
- (c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z = 1$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 + y^2$.

Resolução:

(a) Sejam

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

Note-se que na esfera $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$. A intersecção da esfera com o cone é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 + z^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1,$$

pois $z \geq 0$. Logo, se $z < 1$,

$$1 > \sqrt{2} \cos \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi > \pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$. Assim sendo,

$$g(\phi, \theta) = (\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2} \cos \phi)$$

com $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = (\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta, \sqrt{2} \cos \phi \operatorname{sen} \theta, -\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 0)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2} \cos \phi \cos \theta & \sqrt{2} \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \\ -\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta, 2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta, 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{4 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^4 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = 2 |\operatorname{sen} \phi| = 2 \operatorname{sen} \phi$$

(pois $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$). Assim,

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta = 2\pi(2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é (ver exercício 5(c)), é

$$g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

com $D = \{u^2 + v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(-2u, -2v, 1)\| dS = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} du dv$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T , é a coroa circular

$$1 < x^2 + y^2 < 4 \quad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1 , é a face do cilindro dada por $x^2 + y^2 = 1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2 , é o parabolóide $z = x^2 + y^2$, ambas entre os planos $z = 1$ e $z = 3$. Intersectando tanto o parabolóide como o cilindro com o plano $z = 1$ obtém-se a mesma curva: $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1 :

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= Vol_2(S_T) + Vol_2(S_1) + Vol_2(S_2) \\ &= (\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2) + (2\pi \cdot 1) \cdot 3 + Vol_2(S_2) \\ &= 9\pi + Vol_2(S_2) \end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) = \iint_{S_4} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

onde $g : T \rightarrow S_2$, com $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Assim:

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r^2 + 1)^{1/2} r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \frac{2}{3 \cdot 8} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}) \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) = 9\pi + \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2})$$

8. Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$, para $(x, y) \in K$, é dada pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução:

Uma parametrização da superfície, que designamos por S , é $g : K \rightarrow S$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

com $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

pelo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $1 \leq r \leq 2$. Então

$$A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1 + 4r^2$ (o que implica $5 \leq u \leq 17$ e $\frac{du}{dr} = 8r$). Então

$$A = \frac{2\pi}{8} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} u^{1/2} du = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2})$$

9. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2; 1 < y < 4\}.$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$ calcule a massa total de S .

Resolução:

A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) = \int_S \alpha dS.$$

Considerando a parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho^2, \rho \sin \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 1 < \rho < 2$$

tem-se que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}.$$

Desta forma

$$M(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho, \theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 (1 + 4\rho^2) \rho d\rho = 33\pi.$$