

ESTRUTURA (molde fixo)

Q1(5v) Volume p/ integrais iterados, ordem dada (só escrever) ·
Q2(4v) Mudança coord. (massa/vol) · Q3(3v) Int. linha escalar ·
Q4(5v) Campo: gradiente? + trabalho · Q5(3v) Demonstração.
Tempo: Q1+Q2 (mecânicas) primeiro ≈25min · Q4 ≈20min · Q3 ≈8min · Q5 ao fim. *Lagrange (F6) caiu no MAP2.*

JACOBIANOS |det J| (decorar)

Polares $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ r
Pol. elípt. $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ $ab\,r$
Cilíndricas $(r,\cos\theta,r\sin\theta,z)$ r
Cil. eixo Ox $(x,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ ρ^2
Esféricas $\rho^2\sin\phi$
Esf.: $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$, $z=\rho\cos\phi$; $\rho\geq 0$, $\phi\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$.
 $\iint_S f\,dx\,dy = \iint_T f\,| \det J| \,du\,dv$ — sempre em módulo.
À medida $(u=xy,\dots)$: $|\det J| = 1/|\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|$.

Q1 · VOLUME ITERADO (F7 · Fubini)

$V = \iiint_V 1\,dV$. Ordem p. ex. $\iiint dx\,dy\,dz \Rightarrow$ dentro→fora:
1. Var. **externa** (z): intervalo **global** (constante).
2. Fixa $z \rightarrow$ descreve a **fatia** (corte) nas outras 2.
3. Onde a geometria da fatia **muda** (o min/max troca) $\rightarrow$ **parte em soma** de integrais.
Externo sempre c/ limites constantes; o interno é que depende.
A cotação está em partir o domínio (quase sempre 2–3 integrais).

Trocar ordem se a primitiva não existe: $\cos x^2$, e^{x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, e^{xy} .

Q2 · MUDANÇA DE COORD. (F8)

Escolha por **simetria**:
• x^2+y^2 + eixo $z \rightarrow$ **cilíndricas**
• $x^2+y^2+z^2$ / cones $\rightarrow$ **esféricas**
• $y^2+z^2 \rightarrow$ cil. eixo Ox : $(x,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$
• $(\sqrt{x^2+y^2-a})^2+z^2$ (toro) $\rightarrow$ cil.+transladar ρ
Passos: 1.ª simetria $\rightarrow$ rescreve **cada** desigualdade (limites) $\rightarrow$ integrando $x|\det J| \rightarrow$ integra $(\theta,\phi$ separam-se).
Cone $z \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cos\phi \leq \sin\phi \Rightarrow \phi \geq \frac{\pi}{4}$.
Põe a var. de limite dependente ($x < \rho$) como a **mais interna**.
Inércia $I_{eixo} = \iiint \sigma\,d^2\,dV$ ($d=\text{dist. ao eixo}$); eixo z deslocado
 $L: d^2 = (L+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2$.
Centroíde $\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint x\,dV$; c/ densidade: $M = \iiint \sigma\,dV$.

Q3 · INT. LINHA ESCALAR (F9)

$$\int_L \sigma\,ds = \int_a^b \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \,dt$$

Não depende do sentido. Massa $M = \int_L \sigma\,ds$; c.m.
 $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_L x\,\sigma\,ds$; compr. $L = \int \|\gamma'\| \,dt$.
1. **Parametriza** (curva = interseção de superf.: substitui 1 eq. na outra $\rightarrow$ reconhece circunf.).
2. $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|$.
3. Substitui em σ , integra. (σ e $\|\gamma'\|$ costumam dar constantes.)

Q4 · CAMPO VETORIAL (F10–11)

Trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma) \cdot \gamma' \,dt$ — **depende da orientação** (troca sentido = troca sinal).

Fechado (necessário): 2D $\partial_y P = \partial_x Q$; 3D $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Gradiente = fechado + **domínio simpl. conexo**.

TFC: $\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\text{fim}) - \phi(\text{inic})$; fechada $\Rightarrow 0$.

Potencial: integra $\partial_x\phi = F_1$ em $x \rightarrow \phi + g(y,z)$; impõe $\partial_y\phi = F_2$ acha g ; idem z .

Atalhos: parte $C = C_1 \cup C_2$; se $\mathbf{F} \perp \gamma' \Rightarrow 0$; segmento $\gamma(t) = A + t(B-A)$, $t \in [0,1]$.

ÁRVORE DE DECISÃO (trabalho)

- Gradiente?** Sim+fechada $\rightarrow 0$; Sim+aberta $\rightarrow$ **TFC**.
- Singularidade** (denom. x^2+y^2)? **Decompõe** $\mathbf{F} = \nabla\phi + \text{sing.}$; parte sing. = $\pm 2\pi$ se a curva a *envolve*, senão 0.
- Fechada s/ sing. dentro $\rightarrow$ **Green**.

GREEN & HOMOTOPIA (F11)

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) \,dA$$

Orient. $+$ = anti-horário (D à esquerda); horária $\rightarrow$ **troca sinal**.
Exige $\mathbf{F} \in C^1$ em *todo* D .

Área: $A = \oint x\,dy = -\oint y\,dx = \frac{1}{2} \oint (x\,dy - y\,dx)$.

Homotopia: $\mathbf{F}$ fechado, $C_1 \sim C_2 \Rightarrow$ integrais iguais $\rightarrow$ troca curva por circunf. à volta do buraco.

Várias sing.: $\oint_C \mathbf{F} = \sum (\pm 2\pi$ (carga 2π cada; fora contam 0)).

SINAIS (decorar — cai todo o ano)

$\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ à volta de 0: anti-horário = $+2\pi$, horário = -2π .

Centrada em (a,b) : idem, conta se a curva **envolve** (a,b) .

$(0,0,z^2) = \nabla(\frac{z^3}{3})$, $(-x,0,z) = \nabla(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2) \rightarrow$ parte gradiente = 0 em curva fechada.

Cuidado: $\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ é fechado mas **não** conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (NÃO aplicar TFC).

REGRA DE LEIBNIZ (F8)

$$\frac{d}{dt} \int_a^{b(t)} f\,dx = f(b,t)b' - f(a,t)a' + \int_a^b \partial_t f\,dx$$

Limites constantes $\Rightarrow$ só $\int_a^b \partial_t f\,dx$ (deriva p/ dentro).

Q5 · TEÓRICAS (clássicos)

- Green disfarçado: calcula $\partial_x f_2 - \partial_y f_1$.
- Deriv. cruzadas iguais (Fubini, por contradição).
- Caminho gradiente não fecha: $f(\gamma_b) - f(\gamma_a) = \int \|\nabla f\|^2 > 0$.
- $\int Fd\gamma = \int Gd\gamma \, \forall \gamma \Rightarrow F=G$.
- Identidade de Green: $\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\Delta\psi$.

F6 · LAGRANGE (revisão rápida)

$\nabla f = \lambda \nabla g$ ($+g=0$); 2 restr. $+\mu \nabla h$.
Região $g \leq 0$: interior ($\nabla f=0$) + fronteira (Lagrange); compara f . Caixa vol. fixo=cubo.

ANTI-ERRO (ler antes de entregar)

☐ Jacobiano módulo + correto ($r, \rho^2\sin\phi$) · ☐ limites ϕ, θ das condições · ☐ orientação/sinal do trabalho · ☐ testar **fechado** antes de gradiente · ☐ domínio simpl. conexo p/ TFC · ☐ Q1 partido em vários integrais? · ☐ sing. dentro do Green? $\rightarrow$ recortar/homotopia · ☐ desenhar a região antes de trocar ordem.